This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Acerca de este libro

Esta es una copia digital de un libro que, durante generaciones, se ha conservado en las estanterías de una biblioteca, hasta que Google ha decidido escanearlo como parte de un proyecto que pretende que sea posible descubrir en línea libros de todo el mundo.

Ha sobrevivido tantos años como para que los derechos de autor hayan expirado y el libro pase a ser de dominio público. El que un libro sea de dominio público significa que nunca ha estado protegido por derechos de autor, o bien que el período legal de estos derechos ya ha expirado. Es posible que una misma obra sea de dominio público en unos países y, sin embargo, no lo sea en otros. Los libros de dominio público son nuestras puertas hacia el pasado, suponen un patrimonio histórico, cultural y de conocimientos que, a menudo, resulta difícil de descubrir.

Todas las anotaciones, marcas y otras señales en los márgenes que estén presentes en el volumen original aparecerán también en este archivo como testimonio del largo viaje que el libro ha recorrido desde el editor hasta la biblioteca y, finalmente, hasta usted.

Normas de uso

Google se enorgullece de poder colaborar con distintas bibliotecas para digitalizar los materiales de dominio público a fin de hacerlos accesibles a todo el mundo. Los libros de dominio público son patrimonio de todos, nosotros somos sus humildes guardianes. No obstante, se trata de un trabajo caro. Por este motivo, y para poder ofrecer este recurso, hemos tomado medidas para evitar que se produzca un abuso por parte de terceros con fines comerciales, y hemos incluido restricciones técnicas sobre las solicitudes automatizadas.

Asimismo, le pedimos que:

+ *Haga un uso exclusivamente no comercial de estos archivos* Hemos diseñado la Búsqueda de libros de Google para el uso de particulares; como tal, le pedimos que utilice estos archivos con fines personales, y no comerciales.

+ *No envíe solicitudes automatizadas* Por favor, no envíe solicitudes automatizadas de ningún tipo al sistema de Google. Si está llevando a cabo una investigación sobre traducción automática, reconocimiento óptico de caracteres u otros campos para los que resulte útil disfrutar de acceso a una gran cantidad de texto, por favor, envíenos un mensaje. Fomentamos el uso de materiales de dominio público con estos propósitos y seguro que podremos ayudarle.

+ *Conserve la atribución* La filigrana de Google que verá en todos los archivos es fundamental para informar a los usuarios sobre este proyecto y ayudarles a encontrar materiales adicionales en la Búsqueda de libros de Google. Por favor, no la elimine.

+ *Manténgase siempre dentro de la legalidad* Sea cual sea el uso que haga de estos materiales, recuerde que es responsable de asegurarse de que todo lo que hace es legal. No dé por sentado que, por el hecho de que una obra se considere de dominio público para los usuarios de los Estados Unidos, lo será también para los usuarios de otros países. La legislación sobre derechos de autor varía de un país a otro, y no podemos facilitar información sobre si está permitido un uso específico de algún libro. Por favor, no suponga que la aparición de un libro en nuestro programa significa que se puede utilizar de igual manera en todo el mundo. La responsabilidad ante la infracción de los derechos de autor puede ser muy grave.

Acerca de la Búsqueda de libros de Google

El objetivo de Google consiste en organizar información procedente de todo el mundo y hacerla accesible y útil de forma universal. El programa de Búsqueda de libros de Google ayuda a los lectores a descubrir los libros de todo el mundo a la vez que ayuda a autores y editores a llegar a nuevas audiencias. Podrá realizar búsquedas en el texto completo de este libro en la web, en la página `http://books.google.com`

3 3433 06641345 5

OEE
Corrections

TRATADO

DE

ALGEBRA SUPERIOR,

POR

DON JUAN CORTÁZAR,

LICENCIADO EN CIENCIAS, INGENIERO DE PUENTES Y CAMINOS APROBADO (CON DIPLOMA) POR LA ESCUELA CENTRAL DE PARIS, CATEDRÁTICO DE ÁLGEBRA SUPERIOR Y GEOMETRÍA ANALÍTICA DE LA UNIVERSIDAD DE MADRID, ETC.

SEGUNDA EDICION.

MADRID.—1858.

IMPRENTA DE D. F. SANCHEZ, Á CARGO DE D. AGUSTIN ESPINOSA,
plazuela del Conde de Miranda, núm. 5.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
247433
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
1902

OBRAS DE DON JUAN CORTÁZAR.

Memoria sobre el cálculo del interés. . . . . 4 rs.
Tratado de aritmética, 10.ª *edicion, en rústica.* . . . 14
Tratado de álgebra elemental, 9.ª *edicion, en rústica.* 14
Tratado de geometría elemental, 7.ª *edicion, en rústica.* 16
Tratado de trigonometría, 5.ª *edicion, en rústica.* . . 14
Tratado de álgebra superior, 2.ª *edicion, en rústica.* . 15
Tratado de geometría analítica, *en rústica.* 24
Aritmética práctica para las Escuelas primarias, *en rústica.* 2½

Librería de Sanchez, *calle de Carretas* 21, *y de* Martinez, *calle de Relatores* 7.

PRÓLOGO.

En esta nueva edicion del álgebra superior hemos suprimido, como materia poco importante en la práctica, la resolucion de dos ó mas ecuaciones de grado superior al segundo con igual número de incógnitas, y cuanto á esta cuestion se refiere. Tambien hemos suprimido la resolucion trigonométrica de las ecuaciones binomias, por evitar repeticiones, pues esta resolucion se halla en el complemento de nuestro tratado de trigonometría. Hemos mejorado todas las partes de que se componia la primera edicion de este libro; hemos simplificado algunas, como la teoría de los límites de las raices, la de las ecuaciones recíprocas, etc.; ampliado otras, como la de las derivadas, la de las séries, etc. Hemos añadido la resolucion de las ecuaciones trascendentes, la investigacion de los valores máximos y mínimos de las funciones de una variable, y la descomposicion de las fracciones racionales en fracciones simples; teorías las dos primeras de gran utilidad en las aplicaciones de las matemáticas, y la tercera tambien necesaria en la integracion de las funciones racionales.

Creemos haber incluido en esta edicion cuantas materias útiles forman el objeto de esta parte del álgebra, sin que el volúmen del libro haya aumentado gran cosa.

En una nota al fin de la obra, hemos dado la análisis indeterminada de primer grado; aunque este asunto no pasa de ser puramente curioso.

20MAY 02

LIBRO QUINTO.

SÉRIES.

1 Convergencia y divergencia de las séries..... 149
2 Desarrollo de las funciones simples de una variable en séries. 153

LIBRO SESTO.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES TRASCENDENTES; MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE; DESCOMPOSICION DE LAS FRACCIONES RACIONALES EN FRACCIONES SIMPLES.

1 Resolucion de las ecuaciones trascendentes..... 168
2 Máximos y mínimos de las funciones de una variable..... 182
3 Descomposicion de las fracciones racionales en fracciones simples..... 192
NOTA. Análisis indeterminada de primer grado..... 214

ERRATAS.

Pág.	*Línea.*	*Dice.*	*Debe decir.*
3	— 5	unidades	unidades de
38	9	3.°	4.°
62	— 7	$p\sqrt{-1}$	$q\sqrt{-1}$
68	3	inferior	superior
73	1	III	IV
85	— 15	2.°	3.°
98	— 8	3.°	5.°
146	2	$\frac{2\pi + \varphi}{2}$	$\frac{2\pi + \varphi}{3}$

ÍNDICE.

PARTE PRIMERA.

LIBRO PRIMERO.

FRACCIONES CONTÍNUAS.—FUNCIONES DERIVADAS.

Capítulos.		Páginas.
1	Fracciones contínuas	1
2	Funciones derivadas	20

LIBRO SEGUNDO.

COMPOSICION Y TRANSFORMACION DE LAS ECUACIONES ALGÉBRICAS.

1	Composicion de las ecuaciones	42
2	Transformacion de las ecuaciones	48

LIBRO TERCERO.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES NUMÉRICAS.

1	Límites de las raices	56
2	Teoremas sobre la existencia de las raices reales	59
3	Raices conmensurables	64
4	Raices inconmensurables	73

LIBRO CUARTO.

ECUACIONES RECÍPROCAS; RESOLUCION ALGÉBRICA DE LAS ECUACIONES BINOMIAS; RESOLUCION ALGÉBRICA DE LAS ECUACIONES DE TERCERO Y CUARTO GRADO; RESOLUCION TRIGONOMÉTRICA DEL CASO IRREDUCIBLE DE LAS ECUACIONES DE TERCER GRADO.

1	Ecuaciones recíprocas	122
2	Resolucion algébrica de las ecuaciones binomias	128
3	Resolucion algébrica de las ecuaciones de tercero y cuarto grado	135
4	Resolucion trigonométrica del caso irreducible de las ecuaciones de tercer grado	144

ALGEBRA SUPERIOR.

LIBRO PRIMERO.

FRACCIONES CONTÍNUAS. — FUNCIONES DERIVADAS.

CAPÍTULO I.

Fracciones contínuas.

1. Se llama *fraccion contínua* una espresion de la forma

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}$$

en la que las cantidades a, b, c, etc. son números enteros y positivos.

Las fracciones contínuas sirven para hallar valores aproximados, en términos mas sencillos, de las fracciones irreducibles, y para hallar valores aproximados conmensurables de algunas espresiones numéricas inconmensurables.

2 Hé aquí el método general que debe seguirse para hallar en fraccion contínua el valor de una cantidad conmensurable ó inconmensurable en los dos casos que conviene distinguir, á saber: cuando la cantidad que se va á transformar en fraccion contínua es una cantidad conocida, y cuando dicha cantidad es la incógnita de una ecuacion.

1.er *caso.* Sea A la cantidad conocida que se va á transformar en fraccion contínua.

Hallemos el número a de sus unidades: estará A comprendida entre a y $a + 1$, y será por lo tanto

$$A = a + \frac{1}{y},$$

siendo $y > 1$. Despejando la y en esta ecuacion, quedará c

llegaremos á un residuo 0, que, para fijar las ideas, supondremos sea el residuo R''': será por lo tanto $\frac{R'}{R''} = C'''$.

Sustituyendo en el valor de $\frac{A}{B}$ el de y ó $\frac{B}{R}$, en el que resulte el de z ó $\frac{R}{R'}$, y asi sucesivamente, tendremos

$$\frac{A}{B} = C + \cfrac{1}{C' + \cfrac{1}{C'' + \cfrac{1}{C'''}}}.$$

Obsérvese que las divisiones que se han efectuado para hallar los cocientes C, C', C'', C''', son las mismas que se harian para hallar el máximo comun divisor de los números A y B.

Luego, *para reducir una fraccion ordinaria á fraccion continua, se ejecutarán con sus dos términos las mismas operaciones que para hallar el máximo comun divisor de estos, y los cocientes que resulten, serán los cocientes incompletos de la fraccion continua.*

Si el quebrado propuesto es mayor que 1, el primer cociente será la parte entera de la fraccion continua equivalente; y si el quebrado es menor que 1, la fraccion continua equivalente no tendrá parte entera.

Segun la regla que acabamos de hallar, si queremos reducir á fraccion continua la fraccion $\frac{715}{228}$, ejecutaremos el cálculo siguiente:

715	228	31	11	9	2	1
	3	7	2	1	4	2
31	11	9	2	1	0	

Luego
$$\frac{715}{228} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}}.$$

Si quisiéramos reducir á fraccion continua el quebrado $\frac{75}{114}$, ejecutaríamos el cálculo siguiente:

114	75	39	36	3
	1	1	1	12
39	36	3	0	

Luego
$$\frac{75}{114} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12}}}}.$$

2.° *Reducir á fraccion continua la cantidad inconmensurable* $\sqrt{2}$.

El número de unidades que contiene $\sqrt{2}$ es 1; hago pues

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x},$$

de donde
$$x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Para hallar con facilidad el número de unidades de x, haremos que el denominador sea racional, multiplicando los dos términos por $\sqrt{2} + 1$, y tendremos

$$x = 1 + \sqrt{2}.$$

Las unidades que contiene x son 2; hago pues

$$1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{y},$$

ó
$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y}.$$

Este resultado nos dice que $y = x$; por consiguiente

$$x = 2 + \frac{1}{x},$$

ecuacion que nos evita la continuacion de la operacion; pues poniendo en el denominador en vez de x su valor $2 + \frac{1}{x}$, será

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}}.$$

Volviendo á poner en vez de esta últ

y continuando del mismo modo, será

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}$$

Luego $$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}},$$

siendo infinito el número de cocientes incompletos.

Ejemplo del segundo caso.

Construir unas tablas de logaritmos.

Supongamos, por ejemplo, que en el sistema cuya base es 10, queramos hallar el logaritmo de 2: tendremos que hallar el valor de x en la ecuacion esponencial $10^x = 2$.

Haciendo primeramente $x = 0$ y en seguida $x = 1$, se ve que x se halla comprendida entre 0 y 1; hago pues

$$x = 0 + \frac{1}{y} = \frac{1}{y};$$

sustituyendo este valor en la ecuacion $10^x = 2$, tendremos

$$10^{\frac{1}{y}} = 2.$$

Para hallar las unidades de y, elevaremos primeramente los dos miembros de la última ecuacion á la potencia cuyo esponente es y, y tendremos

$$2^y = 10:$$

haciendo sucesivamente $y = 1, 2, 3, \ldots.$, se halla que el valor de y está comprendido entre 3 y 4; hago pues

$$y = 3 + \frac{1}{z},$$

y sustituyendo este valor en la última ecuacion, tendré

$$2^3 \times 2^{\frac{1}{z}} = 10,$$

$$2^{\frac{1}{z}} = \frac{5}{4},$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^z = 2.$$

Haciendo sucesivamente $z = 1, 2, 3.....$, se halla que el valor de z está comprendido entre 3 y 4; hago pues

$$z = 3 + \frac{1}{u},$$

y sustituyendo este valor en la ecuacion última, tendremos

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{u}} = 2,$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{u}} = \frac{128}{125},$$

$$\left(\frac{128}{125}\right)^u = \frac{5}{4}.$$

Haciendo sucesivamente $u = 1, 2, 3.....$, se halla que u está comprendida entre 9 y 10; hago pues

$$u = 9 + \frac{1}{t};$$

y continúo asi indefinidamente.

Sustituyendo ahora sucesivamente los valores de y, z, u, etc., resulta

$$x = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \text{etc.}}}}$$

3. *La fraccion contínua equivalente á una cantidad conmensurable es limitada.*

En efecto, las cantidades conmensurables son las enteras y las fraccionarias: las enteras no se pueden reducir á fraccion contínua; las fraccionarias, acabamos de ver, se reducen á fraccion contínua, considerando como cocientes incompletos de la fraccion contínua á los cocientes que resultan, ejecutando con los dos términos del quebrado las mismas operaciones que se harian para hallar su máximo comun divisor; y como el número de cocientes que resultan en el cálculo del máximo comun divisor de dos números es limitado siempre, se infiere que la fraccion contínua equivalente á la fraccion propuesta es [illegible] tada.

Recíprocamente *toda fraccion contínua limitada* [illegible] *una cantidad conmensurable.*

Para demostrar este recíproco, tomemos la fraccion continua limitada

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}:$$

esta fraccion contínua equivale á

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{2}{3}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{11}}=3+\frac{11}{25}=\frac{86}{25},$$

cantidad conmensurable.

La fraccion contínua equivalente á una cantidad inconmensurable es indefinida.

Toda fraccion contínua indefinida es el valor de una cantidad inconmensurable

Estos dos teoremas están incluidos en los dos anteriores, y se demuestran fácilmente por reduccion al absurdo.

4. Siendo la fraccion contínua

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}},$$

las espresiones

$$a,\ a+\frac{1}{b},\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}},\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}},\ \text{etc.},$$

ó mas bien sus valores equivalentes en fracciones ordinarias, se llaman fracciones *reducidas*; y las fracciones $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$, etc. se llaman fracciones *integrantes*.

Por lo tanto, para pasar de una reducida á la siguiente, no hay mas que cambiar en la reducida dada su último cociente en la suma de este cociente y de la fraccion integrante que sigue.

5. *Una reducida cualquiera se forma multiplicando los do*

términos de la reducida anterior por el cociente correspondiente (a), *y añadiendo respectivamente á estos productos los dos términos de la reducida anterior en dos lugares.*

Para demostrar este teorema, observaremos que la primera reducida es $\frac{a}{1}$; la segunda es

$$a + \frac{1}{b} = \frac{ab + 1}{b};$$

la tercera $a + \dfrac{1}{b + \frac{1}{c}}$ se reducirá á fraccion ordinaria, mudando en la reducida segunda b en $b + \frac{1}{c}$; luego la tercera reducida será

$$\frac{a(b + \frac{1}{c}) + 1}{b + \frac{1}{c}}.$$

Multiplicando los dos términos de este quebrado por c, resulta

$$\frac{a(bc + 1) + c}{bc + 1} = \frac{abc + a + c}{bc + 1} = \frac{(ab + 1)c + a}{bc + 1}.$$

Ya vemos que esta reducida está formada segun el teorema.

Esto supuesto, sean $\frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}$ dos reducidas consecutivas, y sus cocientes correspondientes p, q (b); admitamos que la reducida siguiente se forme segun el teorema, y hagamos ver que la reducida siguiente á esta última se formará tambien segun el mismo teorema.

Por suposicion, la reducida siguiente á la $\frac{Q}{Q'}$ es

$$\frac{Qr + P}{Q'r + P'}.$$

Para formar la reducida siguiente á esta, no hay mas que mudar, segun queda dicho, r en $r + \frac{1}{s}$ en la reducida $\frac{Qr + P}{Q'r + P'}$: tendremos, pues, que la nueva reducida será

(a) Entendemos por co[illegible] [illegible]ducida el cociente incompleto que ocupa e[illegible] no lugar que la reducida entre las re[illegible]

(b) Seguiremo[illegible]

$$\frac{Q\left(r+\frac{1}{s}\right)+P}{Q'\left(r+\frac{1}{s}\right)+P'}=\frac{(Qr+P)\,s+Q}{(Q'r+P')s+Q'}:$$

luego esta nueva reducida se forma segun el teorema.

Queda pues demostrado, que si el teorema es cierto para la formacion de una reducida, lo es tambien para la formacion de la siguiente.

Ahora bien, el teorema es cierto para la formacion de la reducida tercera; luego dicho teorema será cierto para la formacion de la cuarta reducida; siéndolo para esta, tambien lo será para la formacion de la quinta, y asi sucesivamente: luego el teorema es general.

Ejemplo. *Hallar las reducidas de la fraccion continua*

$$1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}.$$

Las reducidas son:

$$\frac{1}{1},\ \frac{5}{4},\ \frac{5\times 9+1}{4\times 9+1}=\frac{46}{37},\ \frac{46\times 2+5}{37\times 2+4}=\frac{97}{78},$$

$$\frac{97\times 1+46}{78\times 1+37}=\frac{143}{115},\ \frac{143\times 1+97}{115\times 1+78}=\frac{240}{193},$$

$$\frac{240\times 4+143}{193\times 4+115}=\frac{1103}{886}.$$

Esta última es el valor de la fraccion continua propuesta.

6. *La diferencia de los productos en cruz de una reducida de lugar par y la siguiente es* 1; *y la diferencia de los productos en cruz de una reducida de lugar impar y la siguiente es* — 1.

(Admitimos para fijar el lugar de las reducidas, que la fraccion continua contiene al entero a; si este entero falta, se supondrá que es cero, y que la primera reducida es $\frac{0}{1}$).

Sean

$$\frac{P}{P'},\ \frac{Q}{Q'}\ \text{y}\ \frac{Qr+P}{Q'r+P'}$$

tres reducidas consecutivas cualesquiera: la diferencia de los

productos en cruz de la primera y segunda es $PQ' - QP'$, y la diferencia de los productos en cruz de la segunda y tercera $QP' - PQ'$, cantidad igual y de signo contrario á la diferencia de los productos en cruz de las dos reducidas $\frac{P}{P'}$ y $\frac{Q}{Q'}$.

Luego la diferencia de los productos en cruz de dos reducidas consecutivas es igual y de signo contrario á la diferencia de los productos en cruz de la última de las dos y la siguiente; tomando siempre por minuendo la primera de las dos.

Ahora bien, la diferencia de los productos en cruz de las reducidas $\frac{a}{1}$ y $\frac{ab+1}{b}$, 1.ª y 2.ª de la fraccion continua, es -1; luego la diferencia de los productos en cruz de las reducidas 2.ª y 3.ª será 1, la diferencia de los productos en cruz de las reducidas 3.ª y 4.ª será -1, la de los productos en cruz de las reducidas 4.ª y 5.ª será 1; y asi sucesivamente.

Corolarios. 1.° *Las reducidas son fracciones irreducibles.*

Pues si los dos términos de la reducida $\frac{P}{P'}$ tuviesen un factor comun; segun la igualdad

$$PQ' - QP' = \pm 1,$$

el primer miembro seria divisible por dicho factor comun; luego el segundo miembro ± 1 seria tambien divisible por el mismo factor; lo que es absurdo.

2.° *Los numeradores* P *y* Q *de dos reducidas consecutivas son números primos entre sí, é igualmente los denominadores.*

Se demuestra del mismo modo que el corolario 1.°

3.° *Si una fraccion ordinaria, cuyos dos términos tienen un factor comun, se reduce á fraccion continua, y se forman en seguida las reducidas, la última reducida será el valor de dicha fraccion, simplificada enteramente.*

4.° *La diferencia de dos reducidas consecutivas es* ± 1, *dividido por el producto de los denominadores de las dos reducidas; siendo el numerador* $+1$, *si la reducida minuendo ocupa lugar par*, y -1, *si la reducida minuendo ocupa lugar impar.*

7. *Las reducidas de lugar impar son menores que la fraccion continua y las de lugar par son mayores* (a).

(a) Ya sabemos que, siendo limitada la fraccion continua, la última reducida es igual á dicha fraccion.

Sea la fraccion continua

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cdots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}}}}$$

llamemos y á la fraccion continua $r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{t + \text{etc.}}}$;

y será por consiguiente

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cdots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{y}}}}}.$$

La reducida siguiente á las $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ correspondientes á los cocientes p y q será el valor de x, y segun la regla (5) tendremos

$$x = \frac{Qy + P}{Q'y + P'}.$$

Por consiguiente

$$\frac{P}{P'} - x = \frac{P}{P'} - \frac{Qy + P}{Q'y + P'} = \frac{(PQ' - QP')y}{P'(Q'y + P')},$$

ó, puesto que

$$PQ' - QP' = \pm 1,$$

será

$$\frac{P}{P'} - x = \frac{\pm y}{P'(Q'y + P')};$$

debiendo tomar el signo $+$, si la reducida $\frac{P}{P'}$ ocupa lugar par, y el signo $-$, si dicha reducida ocupa lugar impar: luego en el

primer caso $\frac{P}{P'} > x$, y en el segundo $\frac{P}{P'} < x$, conforme al teorema.

8. *Cada reducida se aproxima á la fraccion contínua mas que la reducida anterior.*

Sean $\frac{P}{P'}$ y $\frac{Q}{Q'}$ dos reducidas consecutivas, y supongamos primeramente que la reducida $\frac{P}{P'}$ ocupe lugar par: haciendo

$$y = r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{t + \text{etc.}}},$$

hallaremos, como en el teorema anterior,

$$x = \frac{Qy + P}{Q'y + P'}.$$

Luego

$$\frac{P}{P'} - x = \frac{P}{P'} - \frac{Qy + P}{Q'y + P'} = \frac{y}{P'(Q'y + P')},$$

$$x - \frac{Q}{Q'} = \frac{Qy + P}{Q'y + P'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{1}{(Q'y + P')\,Q'}.$$

La cantidad y ó su igual $r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{t + \text{etc.}}}$ es mayor que 1, y ademas $Q' > P'$ (5); luego

$$\frac{y}{P'(Q'y + P')} > \frac{1}{(Q'y + P')Q'}:$$

luego la segunda diferencia es menor que la primera.

La misma demostracion se haria, si la primera reducida $\frac{P}{P'}$ fuese de lugar impar, hallando los valores de las dos diferencias

$$x - \frac{P}{P'} \text{ y } \frac{Q}{Q'} - x.$$

COROLARIOS DE LOS DOS TEOREMAS ANTERIORES.

1.° *Tomando una reducida por valor de la fracci-*
el error es menor que 1 dividido por el pro
nadores de dicha reducida y la siguiente: p'
continua comprendida estre dichas dos re

la reducida $\frac{O}{O'}$ es mayor que la diferencia entre x y la reducida $\frac{P}{P'}$, la diferencia entre $\frac{m}{m'}$ y x será, con mayor razon, menor que la diferencia entre $\frac{O}{O'}$ y x: luego la fraccion $\frac{m}{m'}$ será mayor que la reducida $\frac{O}{O'}$, y menor que la reducida $\frac{P}{P'}$.

Habiendo demostrado que la fraccion $\frac{m}{m'}$ está comprendida entre las dos reducidas $\frac{O}{O'}$ y $\frac{P}{P'}$, es evidente que

$$\frac{m}{m'} - \frac{O}{O'} < \frac{P}{P'} - \frac{O}{O'},$$

ó bien (6, *Corol.* 4.°)

$$\frac{mO' - m'O}{m'O'} < \frac{1}{P'O'} \ldots [D].$$

Siendo $$\frac{m}{m'} > \frac{O}{O'},$$

es $$mO' > m'O;$$

luego $$mO' - m'O > 0,$$

y por tanto, como $mO' - m'O$ es entero, será 1 ó mayor que 1; pero en cualquiera de estos dos casos el denominador $m'O'$ será, por consecuencia de la desigualdad $[D]$, mayor que el denominador $P'O'$; luego $m' > P'$.

Para demostrar ahora que $m > P$, tenemos que, siendo

$$\frac{O}{O'} < \frac{m}{m'} < \frac{P}{P'},$$

será $$\frac{1}{\frac{O}{O'}} > \frac{1}{\frac{m}{m'}} > \frac{1}{\frac{P}{P'}},$$

ó bien $$\frac{O'}{O} > \frac{m'}{m} > \frac{P'}{P};$$

es decir que la fraccion $\frac{m'}{m}$ está comprendida entre $\frac{O'}{O}$ y $\frac{P'}{P}$;

luego

$$\frac{O'}{O} - \frac{m'}{m} < \frac{O'}{O} - \frac{P'}{P};$$

ó bien

$$\frac{O'm - Om'}{Om} < \frac{1}{OP},$$

mas el entero $O'm - Om' > 0$, esto es 1 ó mayor que 1; luego $Om > OP$, y por consiguiente $m > P$.

Consideremos ahora una reducida de lugar impar $\frac{Q}{Q'}$; y sea $\frac{m}{m'}$ la fraccion que se aproxima á x mas que $\frac{Q}{Q'}$: digo que $m > Q$ y $m' > Q'$.

Sea $\frac{P}{P'}$ la reducida anterior á la $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{P}{P'}$ será de lugar par; y ahora se demostrará como en el caso anterior, que la fraccion $\frac{m}{m'}$ está comprendida entre las reducidas $\frac{P}{P'}$ y $\frac{Q}{Q'}$; luego

$$\frac{P}{P'} - \frac{m}{m'} < \frac{P}{P'} - \frac{Q}{Q'},$$

ó

$$\frac{Pm' - P'm}{P'm'} < \frac{1}{P'Q'};$$

luego, segun se ha demostrado en los casos anteriores, será $m' > Q'$.

Ahora, siendo $\frac{m}{m'} > \frac{Q}{Q'}$, y siendo, como se acaba de demostrar, $m' > Q'$, será tambien $m > Q$; pues si fuese $m \overline{\overline{<}} Q$, seria $\frac{m}{m'} < \frac{Q}{Q'}$; contra lo demostrado.

Segun este teorema, ninguna fraccion se aproxima á una fraccion continua, en términos tan sencillos, tanto como cualquiera de las reducidas.

10. Se llama fraccion continua *periódica* la fraccion continua en que un cierto número de cocientes incompletos se repite periódica é indefinidamente. Llamaremos *período* al grupo de cocientes que se repite continuamente. La fraccion continua será periódica *pura*, si el período principia desde el primer cociente incom-

pleto; y *mixta*, si el período no principia desde el primer cociente incompleto.

Asi, la fraccion contínua

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\text{etc.}}}}}}$$

es una fraccion contínua periódica pura; y la fraccion contínua

$$2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\text{etc.}}}}}}}}$$

es una fraccion contínua periódica mixta.

Toda fraccion contínua periódica es una de las raices de una ecuacion de 2.° grado de coeficientes racionales.

Primer caso. Sea la fraccion contínua periódica pura

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{l+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{l+\text{etc.}}}}}}}};$$

tendremos evidentemente

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{l+\cfrac{1}{x}}}}.$$

Sean $\frac{K}{K'}$ y $\frac{}{L'}$ reducidas correspondientes á los dos últimos cocientes incompletos k y l del período: la reducida siguiente á la $\frac{L}{L'}$, ó el valor de x, se hallará que es (5)

$$x = \frac{Lx + K}{L'x + K'},$$

ó $$L'x^2 + K'x = Lx + K,$$

ó $$L'x^2 + (K' - L)\,x - K = 0,$$

ecuacion de segundo grado cuyos coeficientes L', $K' - L$ y K son cantidades enteras. Teniendo esta ecuacion dos raices reales una positiva y otra negativa, la primera será el valor de la fraccion contínua periódica.

Segundo caso. Sea la fraccion contínua periódica mixta

$$y = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{1}{u + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{1}{l + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{1}{l + \text{etc.}}}}}}}}}}}}$$

hagamos

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{1}{l + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{1}{l + \text{etc.}}}}}}}}$$

:

Sustituyendo este valor en la fraccion contínua propuesta, tendremos

$$y = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{\vdots}{\ddots + \cfrac{1}{u + \cfrac{1}{x}}}}.$$

Sean $\frac{T}{T'}$ y $\frac{U}{U'}$ las dos reducidas de esta fraccion contínua correspondientes á los cocientes t y u, será

$$y = \frac{Ux + T}{U'x + T'} \qquad [1].$$

Tambien, segun el primer caso, el valor de x se halla por la ecuacion

$$x = \frac{Lx + K}{L'x + K'} \qquad [2].$$

Eliminando x entre esta ecuacion y la [1], que es de primer grado con respecto á x, resulta una ecuacion de 2.° grado en y, cuyos coeficientes son racionales. Como la ecuacion que resulta en y, puede tener sus dos raices positivas; si se quiere hallar en fraccion ordinaria el valor de la contínua y, se deducirá de la ecuacion [2] el valor positivo de x, y sustituyendo este valor en la [1] se tendrá el verdadero valor de la fraccion contínua propuesta.

CAPÍTULO II.

Funciones derivadas.

Artículo 1.°

Nociones preliminares.

11. Digimos (*Alg. elem.* 97) que se llama *funcion* de una ó mas cantidades variables toda cantidad cuyo valor depende de los que se den á dichas cantidades variables.

Para representar una funcion, se escriben dentro de un paréntesis las variables x, y, z, etc., y se antepone á dicho paréntesis una de las letras F, F_1, F_2 ..... f, f_1, f_2 ..... φ, φ_1, φ_2.....

Asi, $F(x)$, $F(x, y)$, $\varphi(x, y, z)$, etc. representan funciones de una variable, de dos variables, de tres variables, etc.

En un mismo cálculo dos funciones diferentes se indican por medio de iniciales diferentes.

Asi, en la igualdad

$$f(x) = af_1(x) + bf_2(x)$$

las funciones representadas por las letras f, f_1, f_2 son diferentes entre sí.

Si tenemos una funcion cualquiera de una variable, y la representamos por $f(x)$, y damos á la variable x de esta funcion un valor cualquiera a, el valor que entonces tiene la funcion se representa por $f(a)$. Si la funcion es de dos, tres ó mas variables, y se representa por $f(x, y, z.....)$, y se dan á las variables x, y, z..... los valores cualesquiera a, b, c....., se representará el valor particular correspondiente de la funcion por $f(a, b, c.....)$.

Asi, siendo

$$f(x) = x^3 - 2x + 4,$$

será

$$f(a) = a^3 - 2a + 4,$$
$$f(x+h) = (x+h)^3 - 2(x+h) + 4,$$
$$f(5) = 5^3 - 2.5 + 4,$$
$$f(0) = 4.$$

Si $$f(x, y) = xy + y^2 - 1,$$

será $$f(a, b) = ab + b^2 - 1,$$
$$f(x+h, y+k) = (x+h)(y+k) + (y+k)^2 - 1,$$
$$f(2, 3) = 2 \times 3 + 3^2 - 1,$$
$$f(0, 0) = -1.$$

12. *Se llama funcion algébrica* la funcion en que la variable independiente (ó las variables independientes) tiene esponentes y coeficientes conocidos.

Asi, $3x - 5x^{\frac{4}{2}}$ es una funcion algébrica de una variable; $xy - 4x^2$ es una funcion algébrica de dos variables.

Llamaremos funcion *entera* á la funcion de una variable en cuyos términos la variable tiene esponentes enteros y positivos.

Asi, $3x^2$, $5x^3 - \frac{2}{3}x + 8$ son funciones enteras de x.

Se llama funcion *trascendente* toda espresion en que la variable (ó las variables) entra como esponente, ó bajo los signos *log*, *sen*, *arc sen* (arco cuyo seno es), *arc tg* (arco cuya tangente es), etc.

Asi, a^x, log x, sen x, arc sen x, x + log y son funciones trascendentes.

Funcion *esplícita* de una variable es la funcion en que están

determinadas las operaciones que deben hacerse en sus diferentes términos para obtener el valor de la funcion.

Asi, $x - 5x^{\frac{4}{3}}$ ó $y = 3x - 5x^{\frac{4}{3}}$ es una funcion esplicita de la variable x.

Funcion *implícita* de una variable es la funcion que está ligada á la variable por medio de una ecuacion no resuelta.

Si, por ejemplo, tenemos la ecuacion

$$x^3 - 5x^2 y + y^2 = 0,$$

y la x es la variable independiente, la y será una funcion implícita de la variable x. Esta funcion y se haria esplícita resolviendo la ecuacion con respecto á ella.

Si tenemos una funcion $f(x, y, z, \ldots)$ de una ó mas variables, las cuales supondremos tienen valores cualesquiera, pero fijos, y damos á estos valores los incrementos positivos ó negativos $h, k, l, \ldots$ la funcion tendrá el nuevo valor $f(x + h, y + k, z + l, \ldots)$, y por tanto habrá recibido el incremento

$$f(x + h, y + k, z + l, \ldots) - f(x, y, z, \ldots),$$

el cual puede ser positivo ó negativo.

13. Se llama *derivada* de una funcion $f(x)$ de una variable el límite de la razon del incremento de la funcion al incremento de la variable, cuando este último incremento se acerca á cero indefinidamente.

La derivada de $f(x)$ se representa por $f'(x)$, y se lee *funcion prima* de x.

Asi, siendo

$$f(x) = x^2 - 3x + 1,$$

se tendrá

$$f(x + h) = (x + h)^2 - 3(x + h) + 1 = (x^2 - 3x + 1) + (2x - 3)h + h^2.$$

El incremento de la funcion es en este caso $(2x - 3)h + h^2$: la razon de este incremento al incremento h de la variable es $2x - 3 + h$, cuyo límite, disminuyendo h indefinidamente, es $2x - 3$; y por tanto

$$f'(x) = 2x - 3.$$

La derivada de $f'(x)$ se llama la derivada segunda de la funcion $f(x)$, se representa por $f''(x)$; y se enuncia *funcion segunda* de x.

La derivada de $f''(x)$ es la derivada *tercera* de la funcion, se representa por $f'''(x)$, y se lee *funcion tercera* de x, y asi sucesivamente.

A veces la funcion $f(x)$ se suele representar por una letra

y, u, etc., y sus derivadas sucesivas se representan en tales casos por y', y'', y''', etc., u', u'', u''', etc.

Artículo 2.°

Derivadas de las funciones esplícitas de una variable.

---

14. *El límite del producto de varios factores variables es igual al producto de los límites de dichos factores.*

Sean X, Y, Z, U cuatro factores variables, A, B, C, D sus límites respectivos: digo que $\lim.(XYZU) = ABCD$.

En efecto, pudiéndose aproximar indefinidamente los factores variables X, Y, Z, U á sus límites A, B, C, D, es claro que el producto $XYZU$ puede tambien aproximarse al producto $ABCD$ en menos de cualquiera cantidad por pequeña sea.

Corolario. *El límite del cociente de dos cantidades variables es igual al cociente de los límites de dichas cantidades.*

En efecto, $$\frac{X}{Y} = X \times \frac{1}{Y};$$

luego $$\lim.\frac{X}{Y} = \lim.\left(X \times \frac{1}{Y}\right):$$

mas, segun el teorema principal,

$$\lim.\left(X \times \frac{1}{Y}\right) = \lim. X \times \lim. \frac{1}{Y} = A \times \frac{1}{B} = \frac{A}{B};$$

luego $$\lim.\frac{X}{Y} = \frac{A}{B}.$$

15. *El límite de la cantidad* $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ *es la cantidad* $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots\ldots$ *creciendo* m *indefinidamente.*

Supongamos en primer lugar que m sea un número entero positivo. Tenemos por la fórmula del binomio

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2}\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\frac{1}{m^3}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}\frac{1}{m^4} + \ldots\ldots + \frac{1}{m^m},$$

ó bien

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{m}}{2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{2.3}$$

$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)}{2.3.4} + \ldots\ldots + \frac{1}{m^m}.$$

Para hallar el límite de este desarrollo creciendo m indefinidamente, tomemos en él un cierto número de términos, $n+1$, y la suma S de estos $n+1$ términos será

$$S = 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{m}}{2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{2.3} + \ldots\ldots +$$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{2.3\ldots\ldots n}.$$

La suma R de los siguientes términos del desarrollo será

$$R = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n}{m}\right)}{2.3\ \ldots\ldots\ (n+1)} +$$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n+1}{m}\right)}{2.3\ \ldots\ldots\ (n+2)} + \ldots\ldots + \frac{1}{m^m}:$$

por lo tanto

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = S + R.$$

Creciendo m indefinidamente, la cantidad S tiene evidentemente por límite

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{2.3.4\ldots n}.$$

Para hallar el límite de R, observo que sus términos son respectivamente menores que los de la progresion geométrica

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{m^{m-1}}:$$

Esta suma equivale á

$$\frac{\frac{1}{2^n}\cdot 2-\frac{1}{m^{m-1}}}{2-1}=\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{m^{m-1}};$$

por consiguiente R es menor que esta cantidad, y con mayor razon

$$R<\frac{1}{2^{n-1}},$$

cantidad que puede acercarse á cero cuanto se quiera creciendo n indefinidamente; luego el límite de R es 0; y por tanto,

$$\text{lím.}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots.$$

Por abreviar llamaremos á esta série e (*a*).

Supongamos ahora que m sea un número fraccionario positivo, tan grande como se quiera: estará comprendido entre dos enteros consecutivos n y $n+1$. Tenemos evidentemente

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \begin{array}{l}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\\ >\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\end{array},$$

ó bien

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \begin{array}{l}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ >\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}:\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\end{array}.$$

Si m crece indefinidamente, tambien n crecerá del mismo modo; luego el límite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y de $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ será e, segun el caso anterior; y como el límite tanto de $1+\frac{1}{n}$ como de $1+\frac{1}{n+1}$ es 1, se infiere que el límite del producto $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$ será e, como tambien el del cociente

(*a*) Los logaritmos en el sistema cuya base es e, se llaman logaritmos *neperianos*, y se representan por la inicial l. Asi, la quiere decir logaritmo neperiano de a.

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$. Tenemos pues que las dos cantidades $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ y $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$ tienen por límite e, creciendo indefinidamente m y por consiguiente tambien n: mas la cantidad $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ esta comprendida entre las dos cantidades $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ y $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$; luego su límite será tambien e.

Supongamos ahora que m sea un número negativo, de un valor absoluto indefinidamente grande: poniendo en manifiesto el signo de m, la espresion, cuyo límite se trata de hallar, es

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\left(\frac{m-1}{m}\right)^{-m}=\frac{1}{\left(\frac{m-1}{m}\right)^{m}}=$$

$$\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m}=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right).$$

Creciendo m indefinidamente, el primer factor de este último producto tiene por límite e, y el segundo factor tiene por límite 1; luego el límite del mismo producto, ó de $\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}$ es $e\times 1 = e$.

Nota. Si α es una cantidad cuyo valor absoluto puede ser menor que cualquiera cantidad dada, $\frac{1}{\alpha}$ será una cantidad cuyo valor absoluto será mayor que cualquiera cantidad asignable; luego

$$\text{lím. } (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

16. Pasemos ya á hallar las derivadas de las funciones esplícitas de una variable, y principiemos por las que se llaman funciones *simples*, por no entrar la variable en ellas mas que una sola vez.

Derivada de la funcion x^m, *siendo* m *un número entero ó fraccionario, positivo ó negativo.*

Siendo h el incremento dado al valor fijo x de la variable, la derivada de x^m es, segun la definicion,

$$\text{lím. } \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = \text{lím. } x^m \cdot \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^m - 1}{h};$$

y si hacemos $\frac{h}{x} = \alpha$, ó $h = \alpha x$, la derivada pedida será

$$\text{lím. } x^m \,.\, \frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha x} = \text{lím. } x^{m-1} \,.\, \frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha};$$

y pues x tiene un valor cualquiera, pero fijo, x^{m-1} es independiente de α; y por tanto la derivada de x^m es

$$x^{m-1} \text{ lím. } \frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha}.$$

La cuestion está pues reducida á hallar este límite, es decir la cantidad constante á que se va aproximando $\frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha}$ á medida que h, y por consiguiente α, va acercándose indefinidamente á 0.

Sea en primer lugar m entero y positivo.

Tenemos

$$\frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha} = \frac{(1+\alpha)^m - 1}{(1+\alpha) - 1} = (1+\alpha)^{m-1} + (1+\alpha)^{m-2} + \ldots + (1+\alpha) + 1;$$

luego

$$\text{lím. } \frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha} = 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 = m.$$

Sea ahora $m = \frac{p}{q}$, fraccion positiva: tenemos que hallar el límite de $\frac{(1+\alpha)^{\frac{p}{q}} - 1}{\alpha}$.

Hagamos $(1+\alpha)^{\frac{1}{q}} = 1 + \beta$,

ó $1 + \alpha = (1+\beta)^q$,

y $\alpha = (1+\beta)^q - 1$;

será por lo tanto

$$\frac{(1+\alpha)^{\frac{p}{q}} - 1}{\alpha} = \frac{(1+\beta)^p - 1}{(1+\beta)^q - 1} = \frac{\frac{(1+\beta)^p - 1}{\beta}}{\frac{(1+\beta)^q - 1}{\beta}}:$$

á medida que h va disminuyendo indefinidamente, α disminuye del mismo modo, asi como tambien β; luego los límites del dividendo y divisor de este cociente son, segun el caso precedente, p y q; luego el del mismo cociente es $\frac{p}{q}$ ó m.

Sea por último $m = -n$, número negativo entero ó fraccionario: tenemos que hallar

$$\lim. \frac{(1+\alpha)^{-n} - 1}{\alpha}.$$

Tenemos

$$\frac{(1+\alpha)^{-n} - 1}{\alpha} = \frac{\frac{1}{(1+\alpha)^n} - 1}{\alpha} = -\frac{(1+\alpha)^n - 1}{\alpha.(1+\alpha)^n}$$

$$= -\frac{1}{(1+\alpha)^n} \times \frac{(1+\alpha)^n - 1}{\alpha}.$$

El límite del primer factor $-\frac{1}{(1+\alpha)^n}$ es -1, y el del segundo es, segun queda demostrado en los dos casos anteriores, n; luego el del producto es $-1 \times n = -n = m$.

Queda pues demostrado que en todos los casos

$$\lim. \frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha} = m.$$

Por consiguiente *la derivada de* x^m *es* mx^{m-1}.

Luego *la derivada de una potencia de la variable es igual al esponente multiplicado por una potencia de la variable, cuyo esponente es inferior en una unidad al de la potencia propuesta.*

17. *Derivada de la funcion esponencial* a^x, *siendo* a *positivo.*

Segun la definicion, la derivada de a^x es

$$\lim. \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim. a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim. \frac{a^h - 1}{h}.$$

Para hallar este límite, observaremos que siendo h una cantidad positiva, tan pequeña como se quiera, será $a^h > 1$ cuando $a > 1$, y $a^h \gtrless 0$ cuando $a < 1$ (*Alg. elem.* 200 *y* 202); y en ambos casos la diferencia $a^h - 1$ es una cantidad tan pequeña como nos acomode, siendo h convenientemente pequeña.

Hagamos la diferencia

$$a^h - 1 = \alpha,$$

ó

$$a^h = 1 + \alpha;$$

será $\alpha > 0$, cuando $a > 1$; y $\alpha < 0$, cuando $a < 1$: de esta igualdad, tomando los logaritmos neperianos de los dos miembros, y despejando en seguida la h, resulta

$$h = \frac{l(1+\alpha)}{la};$$

luego $$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{\alpha}{\frac{l(1+\alpha)}{la}} = \frac{la}{l(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

El límite de $l(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ es (15, nota) $le = 1$; luego

$$\lim. \frac{a^h - 1}{h} = la.$$

Por consiguiente *la derivada de la cantidad esponencial* a^x *es* $a^x la$.

Luego *la derivada de la funcion esponencial* a^x *es igual al producto de la misma funcion por el logaritmo neperiano de la base.*

Corolario. *La derivada de* e^x *es* e^x, *pues* $le = 1$.

18. *Derivada de la funcion logaritmica* $\log x$.

Esta derivada es

$$\lim. \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim. \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h},$$

y haciendo $\frac{h}{x} = \alpha$, ó $h = \alpha x$, la derivada es

$$\lim. \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha x} = \frac{1}{x} \lim. \log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x} \log e.$$

Tenemos pues que *la derivada del logaritmo de la variable es la cantidad reciproca de la variable, multiplicada por el logaritmo de la base neperiana.*

Corolario. Si se trata del logaritmo neperiano lx de la variable, será $le = 1$, y por consiguiente la *derivada del logaritmo neperiano de la variable es la cantidad reciproca de la variable.*

19 *Derivadas de sen* x y *cos* x.

La derivada de $\operatorname{sen} x$ es

$$\lim. \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim. \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h} =$$

$$\lim. \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

El límite del factor $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ es $\cos x$, el de $\frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ es (*Trig.* 124) 1; luego el del producto de ambos factores es $\cos x \times 1 = \cos x$.

Luego *la derivada del seno de un arco* x *es el coseno del mismo arco.*

La derivada de $\cos x$ es

$$\lim.\ \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim.\ \frac{-2\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h} =$$

$$\lim.\ -\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\operatorname{sen} x \times 1 = -\operatorname{sen} x.$$

Luego *la derivada del coseno del arco* x *es el seno del mismo tomado negativamente.*

20. *Derivada de tg* x.

Esta derivada es

$$\lim.\ \frac{\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg} x}{h} = \lim.\ \frac{\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} h}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} h}-\operatorname{tg} x}{h} =$$

$$\lim.\left(\frac{\operatorname{tg} h}{h}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} h}\right) = 1\times(1+\operatorname{tg}^2 x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Luego *la derivada de la tangente del arco* x *es igual á la unidad dividida por el cuadrado del coseno del mismo arco.*

21. Regla para hallar la derivada de una funcion de funcion.

Sea $u = f(y)$, siendo $y = \varphi x$: u es una funcion de la funcion y de la variable x.

Demos á x el incremento Δx, que se lee diferencia de x, y sea Δy (diferencia de y) el incremento correspondiente de y, y Δu (diferencia de u) el incremento que recibe la funcion u: tenemos evidentemente

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta y}\times\frac{\Delta y}{\Delta x};$$

y como el límite del producto de dos cantidades variables es el

producto de los límites de las mismas, será

$$\lim.\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim.\frac{\Delta u}{\Delta y}\times\lim.\frac{\Delta y}{\Delta x}:$$

mas $\lim.\frac{\Delta u}{\Delta x}$ es la derivada de la funcion de funcion u, $\lim.\frac{\Delta u}{\Delta y}$ es la derivada de u, como si la funcion y fuese la variable independiente, y $\lim.\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la derivada de la funcion y: luego *la derivada de una funcion de funcion de una variable es igual al producto de las derivadas de las dos funciones con respecto á la variable de que dependen inmediatamente.*

Asi, siendo y una funcion de x, las derivadas de a^y, $\log y$, y^m, sen y, etc., serán respectivamente

$a^y\,la\times y'$, $\frac{1}{y}\log e\times y'$, $my^{m-1}\times y'$, $\cos y\times y'$, etc.

A veces se introduce una letra en una funcion de funcion en vez de la segunda funcion para aplicar con claridad la regla precedente.

Asi, para hallar la derivada de $l\,\text{sen}\,x$, que es una funcion de funcion, haremos $\text{sen}\,x=y$, y la funcion propuesta será ly: la derivada de esta funcion es $\frac{1}{y}\times y'=\frac{1}{\text{sen}\,x}\times\cos x=\cot x$.

No es necesario, sin embargo, introducir esa letra auxiliar, pues es fácil aplicar directamente la regla anterior.

Asi, la derivada de $\sqrt{3x^2-5x}$ ó de $(3x^2-5x)^{\frac{1}{2}}$ es

$$\frac{1}{2}(3x^2-5x)^{-\frac{1}{2}}\times(6x-5)=\frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x}}.$$

22. *Derivadas de arc sen* x, *arc cos* x *y arc tg* x.

1.° Siendo

$$y=\text{arc sen}\,x,$$

ó

$$x=\text{sen}\,y;$$

tomando las derivadas de los dos miembros de esta identidad, y observando que sen y es una funcion de la funcion y de sen x, tendremos

$$1=\cos y\times y',$$

de donde

$$y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}};$$

debiendo tomarse el signo + si $\cos y$ es positivo, y el — si $\cos y$ es negativo.

2.° Sea $y = \text{arc}\cos x$, ó $x = \cos y$: derivando, será

$$1 = -\operatorname{sen} y \times y',$$

de donde

$$y' = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} = \frac{1}{\mp\sqrt{1-x^2}},$$

debiendo tomarse el signo — si $\operatorname{sen} y$ es positivo, y el signo + en el caso contrario.

3.° $y = \text{arc}\operatorname{tg} x$ ó $x = \operatorname{tg} y$.

Derivando es

$$1 = \frac{1}{\cos^2 y} \times y',$$

$$y' = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

13 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES COMPUESTAS DE FUNCIONES SIMPLES DE UNA VARIABLE.

23. *La derivada de una suma de funciones de una variable es igual á la suma de las derivadas de las funciones.*

Sea

$$y = A + u + t + z,$$

siendo A una constante, y u, t, z funciones de x.

Dando á x el incremento Δx, y llamando Δy, Δu, Δt, Δz á los incrementos respectivos de las funciones y, u, t, z, será

$$y + \Delta y = A + u + \Delta u + t + \Delta t + z + \Delta z,$$

y por consiguiente

$$\Delta y = \Delta u + \Delta t + \Delta z,$$

ó

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{\Delta z}{\Delta x};$$

luego, pasando á los límites,

$$y' = u' + t' + z',$$

conforme al teorema.

Nota. Obsérvese que el término constante A ha desaparecido en la derivacion.

Ejemplo. La derivada de la funcion $5 + 3x^2 - a^{\operatorname{sen} x}$ es $6x - a^{\operatorname{sen} x}\, l a \cos x$.

Nota. De este teorema y del (16) se deduce que *toda fun-*

cion entera de una variable tiene tantas derivadas como unidades tiene el grado de la funcion.

Asi, la funcion

$$f(x) = 12x^3 - 15x^2 + 8$$

tiene las tres derivadas

$$f'(x) = 36x^2 - 30x,$$
$$f''(x) = 72x - 30,$$
$$f'''(x) = 72.$$

24. *La derivada de un producto de funciones de una variable es igual á la suma de productos que resultan multiplicando la derivada de cada factor por el producto de todos los demas factores.*

Sea $y = ut$, siendo u y t funciones de x: tendremos, dando á la variable x el incremento Δx,

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(t + \Delta t) = ut + u\Delta t + t\Delta u + \Delta u\Delta t;$$

luego $$\Delta y = u\Delta t + t\Delta u + \Delta u\Delta t;$$

y por consiguiente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta t}{\Delta x} + t\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta t}{\Delta x};$$

y pues $\lim.\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, $\lim.\frac{\Delta t}{\Delta x} = t'$, $\lim.\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$,

$\lim.\Delta u.\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0 \times t'$, será

$$y' = ut' + tu'.$$

Consideremos ahora un producto $y = utz$ de tres funciones de x.

Hagamos $ut = w$, y será por consiguiente $y = wz$: luego, segun queda demostrado en el caso anterior,

$$y' = zw' + wz',$$

y como $$w' = tu' + ut',$$

será $$y' = tzu' + uzt' + utz'.$$

Habiendo demostrado el teorema para el producto de tres funciones de x, se demostrará igualmente para un producto de cuatro funciones, despues para uno de cinco, y asi sucesivamente.

Corolario. *La derivada de una funcion que tiene un coeficiente* A, *es igual al producto de la derivada de la funcion por dicho coeficiente*: pues segun el teorema (24), la derivada de $Af(x)$

es $Af'(x) + 0 \times f(x)$, puesto que la derivada de la cantidad constante A es 0; luego la derivada de $Af(x)$ es $Af'(x)$.

25. *La derivada de un quebrado cuyos dos términos son funciones de una variable es igual á la derivada del numerador multiplicada por el denominador, menos la derivada del denominador multiplicada por el numerador, partida la diferencia por el cuadrado del denominador.*

Sea $\frac{u}{t}$ la fraccion cuyos términos u y t son funciones de x; podremos transformar este cociente en el producto ut^{-1}, y por consiguiente, segun el teorema anterior, la derivada será

$$u \times -1 \times t^{-2} \times t' + t^{-1} u' = -\frac{ut'}{t^2} + \frac{u'}{t} = \frac{tu' - ut'}{t^2},$$

conforme al teorema

Ejemplo. Hallar la derivada de la fraccion

$$y = \frac{x}{-x + (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

La derivada será

$$y' = \frac{-x + (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} - x\left(-1 + \frac{1}{2}(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2x\right)}{\left(-x + (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2} =$$

$$\frac{-x + (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + x - x^2(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\left(-x + (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2}:$$

reduciendo será

$$y' = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\left(-x + (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2};$$

multiplicando los dos términos de este quebrado por $(a^2 + x)^{\frac{1}{2}}$, y reduciendo nuevamente, será

$$y' = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}\left(2x^2 + a^2 - 2x(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right)}.$$

26. Se dice que una funcion $f(x)$ es *creciente* ó *decreciente* cuando creciendo el valor fijo x de la variable en una cantidad positiva h tan pequeña como se quiera, *crece* ó *decrece* la funcion; ó en otros términos, la funcion es creciente cuando $f(x + h) > fx$, y es decreciente cuando $f(x + h) < fx$.

Si la derivada de una funcion es positiva, la funcion es creciente; y si la derivada es negativa, la funcion es decreciente.

En efecto, tenemos

$$\lim . \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x);$$

de donde se infiere que la espresion $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se diferencia de $f'(x)$ en una cantidad ω tan pequeña como queramos, cantidad que desaparece cuando $h=0$: tenemos pues

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \omega.$$

Segun esta identidad, como disminuyendo la cantidad positiva h suficientemente, el valor absoluto de ω llegará á ser menor que el de $f'(x)$, el signo del segundo miembro de esta identidad, y por consiguiente tambien el del primero, será el de $f'(x)$: luego, si $f'(x)$ es positivo, será $f(x+h) > f(x)$; y si $f'(x)$ es negativo, será $f(x+h) < f(x)$; conforme al teorema.

Artículo 3.°

14 *Teorema de Taylor para las funciones enteras de una variable.*

27. *Siendo* f(x) *una funcion entera, será*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + \frac{f''(x)}{1.2}h^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}h^3 + \ldots\ldots$$

Sea

$$f(x) = Mx^m + Nx^n + Px^p + \text{etc.}$$

una funcion entera del grado m, funcion que supondremos ordenada con respecto á x, es decir, supondremos $m > n > p$..... Tendremos

$$f(x+h) = M(x+h)^m + N(x+h)^n + P(x+h)^p + \text{etc.},$$

ó efectuando estos desenvolvimientos por la fórmula del binomio, será

$$f(x+h) =$$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
Mx^m + Mmx^{m-1} & h + M\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2} & h^2 + M\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-} & h^3 + \ldots + Mh^m. \\
+Nx^n + Nnx^{n-1} & + N\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} & + N\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3} & + \ldots \\
+Px^p + Ppx^{p-1} & + P\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2} & + P\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3} & + \ldots \\
\vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Aqui vemos que el primer término del desenvolvimiento de $f(x+h)$ es $Mx^m + Nx^n + Px^p + \ldots\ldots$ ó $f(x)$; que el coefi-

ciente de h es la derivada de $f(x)$; que el coeficiente de h^2 es la derivada de $f'(x)$ dividida por 1.2; que el coeficiente de h^3 es la derivada de $f''(x)$ dividida por 1.2.3; etc., y el último término es Mh^m.

Luego

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + \frac{f''(x)}{1.2}h^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}h^3 + \ldots + Mh^m,$$

que es la fórmula ó el teorema de Taylor, y cuyo segundo miembro tiene evidentemente $m+1$ términos.

Si en esta igualdad mudamos el signo de h, la fórmula de Taylor será

$$f(x-h) = f(x) - f'(x).h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(x)}{2.3}h^3 + \ldots.$$

Ejemplos. 1.° Hallar por medio de la fórmula de Taylor el desenvolvimiento de la funcion $4x^3 - 24x^2 + 3x + 1$ cuando x vale $h+2$.

Tenemos

$$f(h+2) = f(h) + 2f'(h) + 2^2.\frac{f''(h)}{2} + 2^3\frac{f'''(h)}{2.3}.$$

Como la funcion es de tercer grado, no tiene mas que tres derivadas.

Poniendo ahora en vez de $f(h)$, $f'(h)$.... sus valores, que son

$$\begin{aligned} f(h) &= 4h^3 - 24h^2 + 3h + 1, \\ f'(h) &= 12h^2 - 48h + 3, \\ f''(h) &= 24h - 48, \\ f'''(h) &= 24, \end{aligned}$$

tendremos

$$f(h+2) = \left\{ \begin{array}{rrrr} 4h^3 & -24h^2 & +3h & +1 \\ & +24h^2 & -96h & +6 \\ & & +48h & -96 \\ & & & +32 \\ \hline 4h^3 & & -45h & -57. \end{array} \right.$$

Este mismo resultado se pudiera haber obtenido por la igualdad

$$f(2+h) = f(2) + f'(2).h + \frac{f''(2)}{2}.h^2 + \frac{f'''(2)}{2.3}.h^3.$$

En efecto, poniendo en los valores de $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, en vez de x el número 2, tendremos

$$f(2) = -57,\ f'(2) = -45,\ f''(2) = 0,\ f'''(2) = 24;$$

y por consiguiente

$$f(2+h) = -57 - 45h + 4h^3.$$

Nota. Para hallar este resultado por la fórmula del binomio, pondremos en la funcion propuesta en vez de x $h+2$, y el valor de la funcion será

$$4(h+2)^3 - 24(h+2)^2 + 3(h+2) + 1 =$$
$$4h^3 + 24h^2 + 48h + 32 - 24h^2 - 96h - 96 + 3h + 6 + 1 =$$
$$4h^3 - 45h - 57.$$

Ya se ve que en este ejemplo es indiferente hallar este resultado por la fórmula de Taylor ó por la de Newton; pero siempre que la funcion pase del tercer grado, es preferible valerse de la fórmula de Taylor por hallar el valor de $f(x+h)$.

2.° Sea la funcion de dos variables independientes Ax^5y^3, y supongamos en primer lugar que x é y tienen valores cualesquiera, pero fijos, y que conservando la y su valor fijo, demos al valor fijo x de la otra variable el incremento h: el nuevo valor de la funcion propuesta será $A(x+h)^5y^3$. Como y^3 es un número fijo, podemos considerar á la funcion propuesta como funcion de la sola variable x, y por lo tanto desarrollarla por la fórmula de Taylor que acabamos de hallar.

Las cinco derivadas de esta funcion son

$$5Ax^4y^3,\ 20Ax^3y^3,\ 60Ax^2y^3,\ 120Axy^3,\ 120Ay^3;$$

y por tanto reemplazando los seis términos del desarrollo, que actualmente tiene la fórmula de Taylor por sus valores, tendremos

$$A(x+h)^5y^3 = Ax^5y^3 + 5Ax^4y^3h + 10Ax^3y^3h^2 + 10Ax^2y^3h^3 +$$
$$5Axy^3h^4 + Ay^3h^5.$$

28. *Si la variable de una funcion entera crece de una manera continua, ó por grados insensibles, la funcion variará tambien del mismo modo.*

Sea $f(x)$ una funcion entera del grado m, y supongamos que la variable x tenga sucesivamente los dos valores inmediatos a y $a+h$, siendo h una cantidad positiva tan pequeña como se quiera: los valores de $f(x)$ serán $f(a)$ y $f(a+h)$, cuya diferencia es $f(a+h) - fa$. Mas, segun el teorema de Taylor,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(a) + \ldots;$$

luego

$$f(a+h) - f(a) = h\left(f'(a) + \frac{h}{1.2}f''(a) + \frac{h^2}{1.2.3}f'''(a) + \ldots\ldots\right).$$

A medida que disminuye h, la cantidad de dentro del paréntesis se va aproximando á $f'(a)$; y como el factor h se va aproximando á cero, es evidente que el segundo miembro puede acercarse á cero cuanto se quiera; es decir, que la diferencia $f(a+h)-f(a)$ puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada, siendo h suficientemente pequeña; ó en otros términos, creciendo la variable x por grados insensibles, toda funcion entera de esta variable varía tambien por grados insensibles.

Suprimido

Artículo 3.°

Fórmulas de Taylor para las funciones enteras de dos y de tres variables.

---

29. Si tenemos una funcion $f(x,y,z,\ldots)$ de dos ó mas variables independientes, la espresion $f'_x(x,y,z,\ldots)$ significa la derivada de dicha funcion considerando á x como variable, y á las otras variables como si fueran constantes. Igualmente $f'_y(x,y,z,\ldots)$, $f'_z(x,y,z,\ldots)$, etc. representan las derivadas de la funcion con respecto á y, á z, etc. Las espresiones $f''_{x^2}(x,y,z,\ldots)$, $f''_{y^2}(x,y,z\ldots)$, $f''_{xy}(x,y,z,\ldots)$, $f'''_{x^2z}(x,y,z,\ldots)$, etc. representan respectivamente la derivada de $f'_x(x,y,z,\ldots)$ con respecto á x, la derivada de $f'_y(x,y,z,\ldots)$ con respecto á y, la derivada de $f'_x(x,y,z,\ldots)$ con respecto á y, la derivada de $f''_{x^2}(x,y,z,\ldots)$ con respecto á z, etc.

Para abreviar la notacion, se suele suprimir, por lo comun, en todas estas derivadas el paréntesis $(x,y,z,\ldots)$ que se sobrentiende, y escribir: f'_x, f'_y, f'_z, f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{xy}, f'''_{x^2z}, etc.

Por ejemplo, si

$$f(x,y,z)=Ax^5y^5z^5,$$

será

$$f'_x=5Ax^4y^5z^5,$$
$$f'_y=5Ax^5y^4z^5,$$
$$f'_z=5Ax^5y^5z^4,$$
$$f''_{x^2}=20Ax^3y^5z^5,$$
$$f''_{xy}=25Ax^4y^4z^5,$$
$$f_{x^2z}=100Ax^3y^5z^4,$$

etc.

El teorema de Taylor para las funciones de dos variables independientes es la igualdad siguiente:

Siendo f(x,y) *una funcion entera de dos variables* x *é* y,

será

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+f'_x\,.\,h+f''_{x^2}\,.\,\frac{h^2}{1.2}+f'''_{x^3}\,.\,\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$
$$+f'_y\,.\,k+f''_{y^2}.\,\frac{k^2}{1.2}+f'''_{y^3}\,.\,\frac{k^3}{1.2.3}$$
$$+f''_{xy}\,.\,hk+f'''_{x^2y}\,.\,\frac{h^2k}{1.2}$$
$$+f'''_{y^2x}\,.\,\frac{hk^2}{1.2}$$

Para demostrar esta igualdad, imaginemos que en la funcion $f(x,y)$ tengan x é y dos valores cualesquiera, pero fijos, y pongamos en dicha funcion $x+h$ en lugar de x: no habiendo sufrido alteracion la variable y, tendremos por el teorema de Taylor demostrado para las funciones enteras de una variable

$$f(x+h,y)=f(x,y)+f'_x(x,y)\,.\,h+f''_{x^2}(x,y)\,.\,\frac{h^2}{1.2}$$
$$+f'''_{x^3}(x,y)\,.\,\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Sustituyamos ahora en esta igualdad $y+k$ en lugar de y, y tendremos

$$f(x+h,y+k)=f(x,y+k)+f'_x(x,y+k)\,.\,h+f''_{x^2}(x,y+k)\,.\,\frac{h^2}{1.2}$$
$$+f'''_{x^3}(x,y+k)\,.\,\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Ahora, puesto que x permanece la misma é y ha aumentado en k, tendremos por el teorema de Taylor para las funciones en que una sola de las variables recibe un incremento,

$$f(x,y+k)=f(x,y)+f'_y(x,y).k+f''_{y^2}(x,y).\frac{k^2}{1.2}+f'''_{y^3}(x,y).\frac{k^3}{1.2.3}+\ldots$$

$$f'_x(x,y+k)=f'_x(x,y)+f''_{xy}(x,y).k+f'''_{xy^2}(x,y).\frac{k^2}{1.2}\ \ldots.$$

$$f''_{x^2}(x,y+k)=f''_{x^2}(x,y)+f'''_{x^2y}(x,y).k+\ldots$$

$$f'''_{x^3}(x,y+k=f'''_{x^3}(x,y)+\ldots$$

$+$ etc.

Sustituyendo estos valores en la igualdad anterior, resulta la fórmula enunciada.

Casos particulares. 1.° Sea

$$f(x,y) = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F:$$

se trata de hallar el desarrollo de $f(x+h,\ y+k)$, ó de

$$A(y+k)^2+B(x+h)(y+k)+C(x+h)^2+D(y+k)+E(x+h)+F..[M].$$

Tenemos

$$\begin{aligned} f'_x &= By + 2Cx + E, \\ f'_y &= 2Ay + Bx + D, \\ f''_{x^2} &= 2C, \\ f''_{xy} &= B, \\ f''_{y^2} &= 2A: \end{aligned}$$

las derivadas siguientes son nulas. Luego

$$f(x+h,y+k) = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F + (By+2Cx+E)h + (2Ay+Bx+D)k + Ch^2 + Bhk + Ak^2,$$

$$\text{ó } f(x+h,y+k) = Ay^2 + Bxy + Cx^2 \left| \begin{array}{l} +2Ak \\ +Bh \\ +D \end{array} \right| y \left| \begin{array}{l} +Bk \\ +2Ch \\ +E \end{array} \right| x \begin{array}{l} +Ak^2, \\ +Bhk \\ +Ch^2 \\ +Dk \\ +Eh \\ +F, \end{array}$$

resultado fácil de obtener, desenvolviendo directamente la funcion aumentada $[M]$.

30. La fórmula de Taylor para las funciones de tres variables es

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k,z+l) = f(x,y,z) &+ f'_x.h + f''_{x^2}.\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.} \\ &+ f'_y.k + f''_{y^2}.\frac{k^2}{1.2} \\ &+ f'_z.l + f''_{z^2}.\frac{l^2}{1.2} \\ &+ f''_{xy}.hk \\ &+ f''_{xz}.hl \\ &+ f''_{yz}.kl \end{aligned}$$

Para demostrar esta igualdad, demos á las variables x é y los incrementos h y k, y tendremos por la fórmula de Taylor para las funciones en que dos de sus variables reciben incre-

mentos,

$$f(x+h,y+k,z)=f(x,y,z)+f'_x(x,y,z).h+f''_{x^2}(x,y,z).\frac{h^2}{1.2}+\text{ etc.}$$
$$+f'_y(x,y,z).k+f''_{y^2}(x,y,z).\frac{k^2}{1.2}$$
$$+f''_{xy}(x,y,z).hk.$$

Demos ahora el incremento l á la variable z, y tendremos

$$f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z+l)+f'_x(x,y,z+l).h+f''_{x^2}(x,y,z+l).\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$
$$+f'_y(x,y,z+l).k+f''_{y^2}(x,y,z+l).\frac{k^2}{1.2}$$
$$+f''_{xy}(x,y,z+l).hk.$$

Por la fórmula de Taylor para las funciones en que una sola variable recibe un incremento, tendremos

$$f(x,y,z+l)=f(x,y,z)+f'_z(x,y,z).l+f''_{z^2}(x,y,z).\frac{l^2}{1.2}+\ldots$$
$$f'_x(x,y,z+l)=f'_x(x,y,z)+f''_{xz}(x,y,z).l+\ldots.$$
$$f'_y(x,y,z+l)=f'_y(x,y,z)+f''_{yz}(x,y,z).l+\ldots.$$
$$f''_{x^2}(x,y,z+l)=f''_{x^2}(x,y,z)+\ldots.$$
$$f''_{y^2}(x,y,z+l)=f''_{y^2}(x,y,z)+\ldots.$$
$$f''_{xy}(x,y,z+l)=f''_{xy}(x,y,z)+\ldots.$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad anterior, resulta la formula que nos propusimos demostrar.

Caso particular. Sea

$f(x,y,z)=Ax^2+A'y^2+A''z^2+Bxy+B'xz+B''yz+Cx+C'y+C''z+D$:

se trata de hallar el desarrollo de

$$f(x+h,\ y+k,\ z+l),$$

ó de

$$A(x+h)^2+A'(y+k)^2+A''(z+l)^2+B(x+h)(y+k)+B'(x+h)(z+l)+B''(y+k)(z+l)+C(x+h)+C'(y+k)+C''(z+l)+D..[N].$$

Aplicando la fórmula que acabamos de demostrar, se hallará

$$f(x+h,y+k,\ z+l)=Ax^2+A'y^2+A''z^2+Bxy+B'xz+B''yz+$$
$$(2Ah+Bk+B'l+C)x+(2A'k+Bh+B''l+C')y+$$
$$(2A''l+B'h+B''k+C'')z+Ah^2+A'k^2+A''l^2+$$
$$Bhk+B'hl+B''kl+Ch+C'k+C''l+D;$$

resultado fácil de hallar, desenvolviendo directamente la funcion aumentada [N].

LIBRO SEGUNDO.

COMPOSICION Y TRANSFORMACION DE LAS ECUACIONES ALGÉBRICAS.

CAPÍTULO I.

16

Composicion de las ecuaciones algébricas.

31 Se llama ecuacion *algébrica* la ecuacion cuyos dos miembros son funciones algébricas; y ecuacion *trascendente* la ecuacion que tiene uno ó mas términos que son funciones trascendentes.

Toda ecuacion algébrica del grado m con una incógnita puede reducirse á la forma

$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \ldots + Kx + L = 0 \ldots\ldots [1]$,

pasando todos los términos al primer miembro, reduciendo á uno solo todos aquellos en que la incógnita tenga el mismo esponente, y ordenándolos.

Supondremos en lo que sigue que el coeficiente A del primer término de esta ecuacion es positivo; pues cuando resulte negativo, no habrá mas que mudar los signos á todos los términos de la ecuacion, para que sea positivo.

En adelante, mientras no salgamos de las ecuaciones algébricas, entenderemos por la espresion $f(x)$ el polinomio $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L$, cuyo primer término tiene el coeficiente positivo; y por la espresion $\varphi(x)$ el polinomio $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Tx + U$: y obsérvese que $\varphi(x)$ es un caso particular de $f(x)$, caso en que el coeficiente $A = 1$; y por consiguiente cuanto se diga del polinomio $f(x)$ convendrá á φx, mas no al contrario.

La ecuacion se llama *completa* cuando el polinomio $f(x)$ ó $\varphi(x)$ es completo, es decir cuando en sus términos se encuentra la x con todos los esponentes enteros y positivos desde el mayor hasta 0.

§ 32. Hay una regla breve para hallar el valor que tiene un polinomio completo $f(x)$, cuando se sustituye un número en vez de x.

Para hallar esta regla, tomemos el polinomio de quinto grado

$$Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F.$$

Poniendo a en vez de x toma el valor

$$Aa^5 + Ba^4 + Ca^3 + Da^2 + Ea + F,$$

que puede escribirse de los modos siguientes:

$$(Aa + B)a^4 + Ca^3 + Da^2 + Ea + F;$$

$$\big((Aa + B)a + C\big)a^3 + Da^2 + Ea + F;$$

$$\Big[\big((Aa + B)a + C\big)a + D\Big]a^2 + Ea + F;$$

$$\Big\{\Big[\big((Aa + B)a + C\big)a + D\Big]a + E\Big\}a + F.$$

Esta última espresion nos da la regla siguiente:

Para hallar el valor que toma un polinomio completo f(x), *cuando se sustituye un número en vez de* x, *se multiplica el coeficiente del primer término por el número, y al producto se añade el coeficiente del segundo término, la suma se multiplica por el número, y al producto se añade el coeficiente del tercer término; la suma se multiplica por el número, y al producto se añade el coeficiente del cuarto término; y asi sucesivamente hasta que se añada el último término.*

Si el polinomio $f(x)$ es incompleto, se supondrá, para aplicar esta regla, que los términos que faltan existen con el coeficiente 0.

Ejemplos. 1.° Hallar el valor del polinomio

$$x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 2x - 8$$

cuando x vale 2.

Diré: $1 \times 2 - 3 = -1$, $-1 \times 2 - 5 = -7$, $-7 \times 2 + 4 = -10$, $-10 \times 2 + 2 = -18$, $-18 \times 2 - 8 = -44$.

2.° Hallar el valor del polinomio

$$4x^4 - 6x^3 - 18x$$

cuando x vale 4.

Completo este polinomio añadiendo los términos $0x^2 - 0$, y será

$$4x^4 - 6x^3 + 0x^2 - 18x + 0$$

Diré ahora: 4 por 4 16, menos 6 son 10

mas 0 son 40; 40 por 4 son 160, menos 18 son 142; 142 por 4 son 568, mas 0 son 568.

33. Se llama *raiz* de una ecuacion toda cantidad real ó imaginaria que sustituida en vez de la incógnita en dicha ecuacion la satisface.

Toda ecuacion $f(x) = 0$ *tiene una raiz*, ó lo que es igual, *existe un valor de* x, *real ó imaginario, que sustituido en vez de* x *en el polinomio entero* f(x) *anula á este polinomio.*

Admitiremos este teorema, sin detenernos en su complicada demostracion.

34. *Si* a *es raiz de la ecuacion* $f(x) = 0$, *su primer miembro* f(x) *será divisible por* $x - a$; *y no lo será, si* a *no es raiz de dicha ecuacion* (*b*).

En efecto, tenemos por el teorema de Taylor

$$f(x) \text{ ó } f(a + x - a) = f(a) + (x - a) f'(a) + (x - a)^2 . \frac{f''(a)}{1.2} + (x - a)^3 . \frac{f'''(a)}{1.2.3} + \ldots + A(x - a)^m:$$

si a es raiz de la ecuacion $f(x) = 0$, es $f(a) = 0$; y por consiguiente

$$f(x) = (x - a) f'(a) + (x - a)^2 . \frac{f''(a)}{1.2} + (x - a)^3 . \frac{f'''(a)}{1.2.3} + \ldots + A(x - a)^m,$$

y

$$\frac{f(x)}{x - a} = f'(a) + (x - a) . \frac{f''(a)}{1.2} + (x - a)^2 . \frac{f'''(a)}{1.2.3} + \ldots + A(x - a)^{m-1},$$

polinomio entero; luego $f(x)$ es divisible por $x - a$.

Si a no es raiz de la ecuacion, $f(a)$ no es 0, y por tanto, dividiendo $f(x)$ por $x - a$, este cociente seria

$$\frac{f(a)}{x - a} + f'(a) + (x - a) \frac{f''(a)}{1.2} + \ldots$$

polinomio fraccionario; luego $f(x)$ no es, en este caso, divisible por $x - a$.

16 35. *Todo polinomio de la forma* $x^m + Px^{m-1} + \ldots + Tx + V$ *es el producto de* m *factores binomios de primer grado con respecto á* x.

En efecto, sabemos que existe un valor a de x que anula al polinomio $x^m + Px^{m-1} + \ldots + V$, y por tanto este polinomio es

(*b*) Queda demostrado este teorema en el núm. 49 del álgebra elemental.

divisible por $x-a$: el cociente tendrá la forma $x^{m-1}+px^{m-2}+..$; luego tendremos la identidad

$$x^m + Px^{m-1} + \ldots\ldots + V = (x-a)\,(x^{m-1} + px^{m-2} + \ldots\ldots).$$

Admitamos ahora que el polinomio $x^{m-1} + px^{m-2} + \ldots\ldots$ sea el producto $(x-b)\,(x-c)\ldots(x-l)$ de $m-1$ factores binomios; tendremos en consecuencia la identidad

$$x^m + Px^{m-1} + \ldots\ldots = (x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots\ldots(x-l),$$

cuyo seguudo miembro es el producto de m factores binomios: lo que nos dice que si es cierto en algun caso que un polinomio entero $\varphi(x)$ es el producto de tantos factores binomios como unidades tiene su grado, se verificará que un polinomio de un grado inmediato superior será tambien el producto de tantos factores binomios como unidades tiene su grado.

Ahora bien, está demostrado *(Alg. elem.* 183, *nota)* que un polinomio de segundo grado es el producto de dos factores binomios; luego un polinomio de tercer grado será el producto de tres factores binomios, y por tanto un polinomio de cuarto grado será el producto de cuatro factores binomios; y asi sucesivamente.

Nota. Si el polinomio es $Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots + Kx + L$, puede escribir asi:

$$A\left(x^m + \frac{B}{A}x^{m-1} + \ldots\ldots + \frac{K}{A}x + \frac{L}{A}\right);$$

y como el polinomio interior al paréntesis es, segun acabamos de demostrar, el producto de m factores binomios, se ve que el polinomio propuesto es el producto de A y de dichos m factores binomios.

Corolario. *Toda ecuacion* $f(x)=0$ *tiene tantas raices como unidades tiene su grado.*

En efecto, acabamos de demostrar que

$$f(x) = A(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots\ldots(x-l) \qquad [1].$$

Si en esta identidad damos á x cualquiera de los valores $a, b, c\ldots l$, el segundo miembro se reduce á 0, y por consiguiente $f(a)=0$, $f(b)=0$, $f(c)=0\ldots\ldots f(l)=0$; es decir que a, b, $c\ldots\ldots l$ son raices de la ecuacion $f(x)=0$.

Esta ecuacion no puede tener ninguna otra raiz α diferente de a, b, $c\ldots\ldots l$; pues sustituyendo α en vez x, la identidad [1] se transforma en

$$f(\alpha) = A(\alpha-a)\,(\alpha-b)\,(\alpha-c)\ldots\ldots(\alpha-l):$$

como ninguno de los factores de este producto es 0, dicho producto no puede ser cero, y por consiguiente α no es raiz de la ecuacion.

Nota. Puede suceder que algunos de los factores binomios

de $f(x)$ sean iguales entre sí: entonces la ecuacion tiene un número de raices desiguales menor que el de unidades que tiene su grado; pero para que el teorema actual no tenga escepciones, se dice en tal caso que la ecuacion tiene varias raices iguales.

Asi, la ecuacion de 5.° grado

$$(x-1)^2\ (x-2)^3=0$$

no tiene mas raices desiguales que 1 y 2, pero tiene dos raices iguales á 1 y tres raices iguales á 2.

Problema. *Dadas las raices* a, b, c..... *de una ecuacion, componer esta ecuacion.*

Segun el teorema (35), la ecuacion será

$$(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots\ldots=0;$$

ó bien, multiplicando el primer miembro por un número cualquiera A, la ecuacion será

$$A(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots\ldots=0.$$

Es evidente que estas dos ecuaciones tienen las mismas raices a, b, c.....

Nota. Todo cuanto en adelante diremos, tiene por principal objeto la resolucion del problema contrario al anterior, es decir el de hallar las raices de una ecuacion dada.

36. *En toda ecuacion* $\varphi(x)=0$, *ó*

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots\ldots+Kx+L=0,$$

en la que el coeficiente del primer término es 1, *el coeficiente del segundo término mudado el signo es la suma de las raices, el coeficiente del tercer término es la suma de los productos binarios de dichas raices, el coeficiente del cuarto término mudado el signo es la suma de los productos ternarios de las raices; y asi sucesivamente. El último término es el producto de las raices, si la ecuacion es de grado par; y el último término mudado el signo es el producto de las raices, si la ecuacion es de grado impar.*

Sean $a, b, c,\ldots\ l$ las raices: sabemos que la ecuacion puede escribirse asi:

$$(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots\ldots(x-l)=0.$$

Por consiguiente, segun el teorema (*Alg. elem.*, 133), tendremos

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l)=x^m\left.\begin{array}{l}-a\\-b\\-c\\\vdots\end{array}\right|x^{m-1}\left.\begin{array}{l}+ab\\+ac\\+bc\\\vdots\end{array}\right|x^{m-2}\left.\begin{array}{l}-abc\\-abd\\-acd\\\vdots\end{array}\right|x^{m-3}+\ldots\pm abc\ldots l=0.$$

El último término $\pm\ abc\ldots\ldots\ l$, que es el producto de las cantidades $-a, -b, -c,\ldots\ldots -l$, será $+\ abc\ldots\ldots\ l$, si el

número de estas cantidades ó el número de raices a, b, c,..... l de la ecuacion es par, ó si la ecuacion es de grado par, y por tanto en este caso el último término es el producto de todas las raices. El último término será $-abc... l$ si el número de cantidades $-a$, $-b$, $-c$..... $-l$, ó el número de raices es impar, ó si la ecuacion es de grado impar; y entonces el último término mudado el signo es el producto de todas las raices.

Observando pues el resultado obtenido, vemos que el teorema se verifica en todas sus partes.

Nota. El teorema que acabamos de demostrar, da tantas ecuaciones distintas entre las raices, como unidades tiene su grado; por lo que se pudiera creer que de estas ecuaciones podrian deducirse los valores de las raices: pero como las raices entran en dichas ecuaciones del mismo modo, la ecuacion que nos dé una de las raices nos debe dar tambien todas las demás; y asi, eliminando todas las incógnitas menos una, se obtendrá una ecuacion, que solo se diferenciará de la propuesta, en que la letra x estará reemplazada por otra letra.

Tomemos, para hacerlo ver, la ecuacion

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

cuyas raices sean a, b, c: tendremos las siguientes ecuaciones:

$$-a - b - c = P,$$
$$ab + ac + bc = Q,$$
$$-abc = R.$$

Supongamos que se trate de hallar primeramente la incógnita a: deberemos eliminar b y c entre las tres ecuaciones. Para eliminar con facilidad b y c, multiplico la primera ecuacion por a^2, la segunda por a, y sumo las tres ecuaciones, y resulta

$$-a^3 = Pa^2 + Qa + R,$$

ó

$$a^3 + Pa^2 + Qa + R = 0;$$

ecuacion que no se diferencia de la propuesta sino en que la letra x está reemplazada por la letra a; y cuya resolucion ofrece por lo tanto las mismas dificultades que la de la ecuacion propuesta.

Nota. Se vió en el número (186) del álgebra elemental cómo de las relaciones

$$a + b = -P \text{ y } ab = Q$$

se deducen los valores de a y de b, es decir, las raices de la ecuacion

$$x^2 + Px + Q = 0.$$

CAPÍTULO II.

Transformacion de las ecuaciones.

---

37. *Transformar* una ecuacion es hallar otra ecuacion cuyas raices tengan con las de la propuesta una cierta relacion.

Dada una ecuacion, hallar otra cuyas raices sean respectivamente iguales y de signo contrario á las de la propuesta.

Sea la ecuacion $f(x) = 0$: mudando en esta ecuacion el signo de x, se tendrá $f(-x) = 0$.

Observemos ahora que si a es una raiz cualquiera positiva ó negativa de la ecuacion propuesta, $f(a)$ será 0: y que si en el primer miembro de la ecuacion $f(-x) = 0$ sustituimos $-a$ en vez de x, el resultado es $f(--a)$, ó $f(a)$, y como hemos visto que $f(a)$ es 0, se infiere que $-a$ es raiz de la ecuacion

$$f(-x) = 0.$$

Queda pues demostrado que las dos ecuaciones

$$f(x) = 0 \text{ y } f(-x) = 0$$

tienen sus raices respectivamente iguales y de signo contrario.

Luego *para hallar una ecuacion cuyas raices sean respectivamente iguales y de signo contrario á las de la propuesta, no hay mas que mudar el signo de la incógnita en esta ecuacion.*

Nota. En adelante llamaremos á la nueva ecuacion la transformada en $-x$ de la propuesta.

Ejemplos. Sea la ecuacion

$$x^5 + 4x^3 - 5x^2 + 1 = 0;$$

su transformada en $-x$ será

$$-x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 1 = 0,$$

ó

$$x^5 + 4x^3 + 5x^2 - 1 = 0.$$

38. Obsérvese que mudando x en $-x$, los signos de los términos en que x tiene esponente par, no varian; pero si varian los signos de los términos en que x tiene esponente impar: luego si la ecuacion es completa y de grado par, varian los signos de los términos 2.°, 4.°, 6.°, etc., y si la ecuacion es completa y de grado impar, varian primeramente los signos de los términos 1.°, 3.°, 5.°, etc; pero mudando en seguida los signos á todos los términos para que el primero sea positivo, variarán por fin los signos de los términos 2.°, 4.°, 6.°, etc.

Luego *para hallar la transformada en* $-$ x *de una ecuacion completa, no hay mas que mudar los signos á los términos que ocupan lugar par.*

Sea la ecuacion

$$3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x - 1 = 0,$$

su transformada en $-x$ será

$$3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Sea la ecuacion

$$x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 4x - 7 = 0:$$

su transformada en $-x$ será

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 4x + 7 = 0.$$

39. *Dada una ecuacion, hallar otra cuyas raices sean recíprocas de las de la ecuacion propuesta* (a).

Sea la ecuacion $f(x) = 0$: mudando en esta ecuacion x en $\frac{1}{x}$, se tendrá la ecuacion $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Observemos que si a es una raiz cualquiera de la ecuacion propuesta, $f(a)$ será 0; y que si en el primer miembro de la ecuacion $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ sustituimos $\frac{1}{a}$ en vez de x, el resultado es

$$f\left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right) = f(a);$$

y como hemos visto que $f(a)$ es cero, se infiere que $\frac{1}{a}$ es raiz de la ecuacion $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Queda pues demostrado que las dos ecuaciones

$$f(x) = 0 \text{ y } f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

tienen sus raices recíprocas dos á dos.

Luego *para transformar una ecuacion en otra cuyas raices sean respectivamente recíprocas de las de la ecuacion dada, se muda* x *en* $\frac{1}{x}$ *en la ecuacion propuesta.*

Nota. Sean a y b dos raices de la ecuacion propuesta, $\frac{1}{a}$

(a) Ya sabemos que dos cantidades cuyo producto es 1, se llaman *recíprocas.*

Asi, a y $\frac{1}{a}$, $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$, etc. son cantidades recíprocas.

y $\frac{1}{b}$, serán dos raices de la transformada. Si $a > b$, será $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; luego á la mayor de las raices de la ecuacion propuesta corresponde la menor de la ecuacion transformada, y al contrario.

Ejemplo. Sea la ecuacion

$$x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0.$$

La ecuacion, cuyas raices son recíprocas de las de la ecuacion dada, será

$$\frac{1}{x^4} - \frac{3}{x^3} - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x} + 3 = 0,$$

ó bien

$$3x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 3x + 1 = 0.$$

40. *Dada una ecuacion de la forma* $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots\ldots + Tx + U = 0$, *en la que uno ó varios de los coeficientes* P, Q,..... *son fraccionarios, transformarla en otra que tenga la misma forma, pero cuyos coeficientes sean todos enteros.*

Hagamos $x = \frac{y}{h}$, siendo h una cantidad indeterminada, y la ecuacion transformada será

$$\frac{y^m}{h^m} + \frac{Py^{m-1}}{h^{m-1}} + \frac{Qy^{m-2}}{h^{m-2}} + \ldots\ldots + \frac{Ty}{h} + V = 0,$$

ó $y^m + Phy^{m-1} + Qh^2 y^{m-2} + \ldots\ldots + Th^{m-1}y + Vh^m = 0.$

Determínese ahora el valor de h con la condicion de que todos los coeficientes Ph, Qh^2, ..., Vh^m sean enteros, y se tendrá la transformada pedida.

La incógnita y de la ecuacion transformada estará ligada con la x de la propuesta por la relacion $x = \frac{y}{h}$.

Ejemplo. Sea la ecuacion

$$x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2} = 0.$$

Para deducir de esta ecuacion otra en la que el coeficiente del primer término sea 1, y los demas coeficientes sean enteros, haremos $x = \frac{y}{h}$, y sustituyendo, y quitando denominadores, resulta

$$y^4 - \frac{2}{3}hy^3 + \frac{5}{6}h^2y^2 - \frac{3}{4}h^3y - \frac{7}{2}h^4 = 0.$$

Ahora se halla fácilmente que el menor valor que puede tener h para que todos los coeficientes sean enteros, es 6, y por tanto la ecuacion transformada será

$$y^4 - \frac{2}{3}.6y^3 + \frac{5}{6}.6^2y^2 - \frac{3}{4}.6^3y - \frac{7}{2}.6^4 = 0,$$

ó $$y^4 - 4y^3 + 30y^2 - 162y - 4536 = 0.$$

Las incógnitas x é y están ligadas por la ecuacion $x = \frac{y}{6}$.

41. *Dada una ecuacion de la forma*

$$x^m + Phx^{m-1} + Qh^2x^{m-2} + \ldots\ldots + Th^{m-1}x + Vh^m = 0,$$

en que la suma de los esponentes de x *y* h *es la misma en todos sus términos, transformarla en otra de la forma*

$$y^m + Py^{m-1} + Qy^{m-2} + \ldots\ldots + Ty + V = 0.$$

Hágase $x = hy$, y sustituyendo, tendremos

$$h^my^m + Ph^my^{m-1} + Qh^my^{m-2} + \ldots\ldots + Th^my + Vh^m = 0,$$

y suprimiendo el factor comun h^m, será la nueva ecuacion

$$y^m + Py^{m-1} + Qy^{m-2} + \ldots\ldots + Ty + V = 0.$$

Ejemplos. 1.° Sea la ecuacion

$$x^4 + 3.2^3x - 2.2^4 = 0,$$

la cual se halla en el caso que actualmente consideramos, pues que la suma de los esponentes de x y 2 es 4 en todos sus términos.

Hagamos $x = 2y$, y sustituyendo, tendremos

$$2^4.y^4 + 3.2^4y - 2.2^4 = 0,$$

ó $$y^4 + 3y - 2 = 0.$$

2.° Dada la ecuacion

$$x^5 + 8hy^4 + 9h^5 = 0$$

homogénea, es decir cuyos términos son todos del mismo grado, transformarla en ecuacion numérica.

Hagamos $x = hy$, y sustituyendo, tendremos

$$h^5y^5 + 8h^5y^4 + 9h^5 = 0,$$

ó $$y^5 + 8y^4 + 9 = 0.$$

3.° Dada la ecuacion homogénea

$$x^m - a^m = 0,$$

transformarla en ecuacion numérica.

Hagamos $x = ay$, y sustituyendo, tendremos

$$a^m y^m - a^m = 0,$$

ó

$$y^m \quad - 1 = 0.$$

42. *Transformar la ecuacion*

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots\ldots + Tx + V = 0$$

en otra que carezca de uno de sus términos.

Hagamos $x = y + h$, siendo y la incógnita de la nueva ecuacion, y h una indeterminada, de la que dispondremos para que se anule el término que queramos. Sustituyendo en vez de x este valor, tendremos

$$(y+h)^m + P(y+h)^{m-1} + Q(y+h)^{m-2} + \ldots\ldots + T(y+h) + V = 0;$$

y desenvolviendo estas potencias, tendremos

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l}
y^m + mh & y^{m-1} + \dfrac{m(m-1)}{1.2}h^2 & y^{m-2} + \ldots\ldots + & h^m \\
\quad + P & \quad + (m-1)Ph & & + Ph^{m-1} \\
 & \quad + \quad Q & & + Qh^{m-2} \\
 & & & + \\
 & & & \vdots \\
 & & & + Th \\
 & & & + V
\end{array}\right\} = 0 [A].$$

Si queremos que desaparezca el segundo término de esta ecuacion, haremos $mh + P = 0$, de donde $h = -\dfrac{P}{m}$, y por consiguiente $x = y - \dfrac{P}{m}$.

Luego, *para transformar la ecuacion*

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots\ldots = 0$$

en otra que carezca de segundo término, se sustituye en vez de la incógnita otra incógnita sumada con el coeficiente del segundo término mudado el signo, dividido por el esponente del primero.

Nota. Si se quiere transformar la ecuacion

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots\ldots = 0$$

en otra que carezca del segundo término, principiaremos por dividir esta ecuacion por A para que el primer coeficiente sea 1; y se aplicará en seguida la regla anterior.

Ejemplo. Sea la ecuacion

$$x^4 - 8x^2 - 6x^2 + 4x - 7 = 0.$$

Para deducir de esta ecuacion otra que carezca del segundo término, haremos $x = y + 2$, y sustituyendo, tendremos
$(y + 2)^4 - 8(y + 2)^3 - 6(y + 2)^2 + 4(y + 2) - 7 = 0.$

Ya hemos dicho (27, *Nota*) que si la ecuacion es de un grado superior al tercero, se hallará el resultado de esta sustitucion mas breve y fácilmente por el teorema de Taylor que por la fórmula del binomio.

En el ejemplo actual tendremos

$$f(y+2) = f(y) + f'(y).2 + \frac{f''(y)}{2}.2^2 + \frac{f'''(y)}{2.3}.2^3 + \frac{f^{\text{v}}(y)}{2.3.4}.2^4.$$

Ahora,
$$\begin{aligned} f(y) &= y^4 - 8y^3 - 6y^2 + 4y - 7, \\ f'(y) &= 4y^3 - 24y^2 - 12y + 4, \\ f''(y) &= 12y^2 - 48y - 12, \\ f'''(y) &= 24y - 48, \\ f^{\text{v}}(y) &= 24; \end{aligned}$$

luego
$$f(y+2) = \left\{ \begin{array}{rrrrr} y^4 & -8y^3 & -6y^2 & +4y & -7 \\ & +8y^3 & -48y^2 & -24y & +8 \\ & & +24y^2 & -96y & -24 \\ & & & +32y & -64 \\ & & & & +16 \\ \hline y^4 & & -30y^2 & -84y & -71. \end{array} \right.$$

Luego la ecuacion transformada es

$$y^4 - 30y^2 - 84y - 71 = 0.$$

Ejemplo 2.° Sea la ecuacion $x^2 + mx + n = 0$.

Para destruir el segundo término, tengo $x = y - \frac{m}{2}$, y sustituyendo, resulta

$$y^2 - \frac{m^2}{4} + n = 0,$$

ecuacion de segundo grado incompleta, y por tanto fácil de resolver. De ella resulta

$$y = \pm\sqrt{\frac{m^2}{4} - n},$$

y por consiguiente

$$x = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - n},$$

asi queda resuelta la ecuacion completa

Para destruir el tercer término de la ecuacion

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots\ldots = 0,$$

hay que resolver con respecto á h la ecuacion

$$\frac{m(m-1)}{1.2} h^2 + (m-1)Ph + Q = 0,$$

de la que resultarán en general dos valores para h; y por tanto podrá transformarse, en general, de dos modos una ecuacion en otra que carezca de su tercer término.

Para la destruccion del cuarto término, habria que resolver una ecuacion de tercer grado; y asi sucesivamente, hasta el último término, que se desvaneceria, resolviendo con respecto á h la ecuacion

$$h^m + Ph^{m-1} + Qh^{m-2} + \ldots\ldots + Th + V = 0,$$

ecuacion idéntica á la propuesta.

Nota 1.ª Si se quieren destruir al mismo tiempo dos términos de la ecuacion propuesta, se igualarán á cero los coeficientes de los términos correspondientes de la ecuacion [A]: resultarán asi dos ecuaciones con la incógnita h, y que por tanto serán incompatibles, á no ser que exista entre algunos de los coeficientes de la ecuacion una relacion conveniente.

Supongamos, por ejemplo, que se trate de hallar la relacion, ó ecuacion de condicion, que debe existir entre algunos de los coeficientes de la ecuacion, para que el segundo y tercer términos de la ecuacion desaparezcan juntos.

Para esto, deberán verificarse al mismo tiempo las dos ecuaciones

$$mh + P = 0,$$

$$\frac{m(m-1)}{1.2} h^2 + (m-1)Ph + Q = 0.$$

De estas dos ecuaciones con la incógnita h, se deducirá, eliminando h, la relacion entre los coeficientes P y Q, ó sea la ecuacion de condicion

$$\frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{P^2}{m^2} - \frac{(m-1)P^2}{m} + Q = 0,$$

ó reduciendo

$$Q - \frac{(m-1)P^2}{2m} = 0, \text{ ó } Q = \frac{(m-1)P^2}{2m}.$$

Si esta ecuacion de condicion se verifica, la transformada perderá al mismo tiempo los dos términos segundo y tercero.

2.ª No se crea que se pueden destruir por transformacio-

nes sucesivas, primeramente el segundo término, despues el tercero, etc.; porque la destruccion de un término, hace aparecer en la ecuacion transformada el término destruido en la operacion anterior.

Consideremos, para hacerlo ver, la ecuacion

$$y^m + Qy^{m-2} + \ldots\ldots + V = 0,$$

que carece del segundo término: sustituyendo en vez de y $z+h$, tendremos

$$(z+h)^m + Q(z+h)^{m-2} + \ldots\ldots + V = 0,$$

ó desenvolviendo estas potencias, será

$$z^m + mhz^{m-1} + \left(\frac{m(m-1)}{1.2}h^2 + Q\right)z^{m-2} + \ldots\ldots + V = 0.$$

Para que desaparezca el tercer término, el valor de la indeterminada h no puede ser 0, y por tanto, hallando este valor de h, y sustituyéndolo en esta ecuacion, se ve que aparece el término mhz^{m-1}.

LIBRO TERCERO.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES NUMÉRICAS.

CAPÍTULO I.

Límites de las raices.

43. Se llama *límite superior* de las raices positivas de una ecuacion todo número mayor que dichas raices; y *límite inferior* de las raices positivas todo número positivo menor que las mismas raices.

De la definicion del límite superior se infiere que hay infinitos límites superiores de las raices positivas de una ecuacion; y por lo tanto debe procurarse hallar el menor posible. El método que vamos á esponer da, con poco trabajo, límites bastante pequeños.

44. *Dado un polinomio* f(x), *que despues de ordenado no presente mas que un cambio de signo de* + *á* —, *existe un valor positivo de* x *que hace positivo á dicho polinomio.*

Tomemos un polinomio, tal como $x^5 + 2x^4 - 1000x^3 - 100x - 10$, que esté ordenado, y no presente mas que un cambio de signo de + á —: digo que existe un valor positivo de x que hace positivo á este polinomio.

En efecto, podemos escribir este polinomio del siguiente modo:

$$x^4\left(x + 2 - \left(\frac{1000}{x} + \frac{100}{x^2} + \frac{10}{x^4}\right)\right):$$

si el valor positivo que se dé á x, crece indefinidamente, el minuendo $x + 2$ de la diferencia interior al paréntesis crecerá indefinidamente (ó permanecerá constante si no tiene términos variables), mientras que el sustraendo de dicha diferencia irá aproximándose indefinidamente á 0; y por tanto se llegará á un valor de x bastante grande para hacer positiva á dicha diferencia; y como el factor esterior x^4 es positivo, se infiere que el producto, ó sea el polinomio propuesto, será entonces positivo.

45. *Dado un polinomio* f(x), *que despues de ordenado no presente mas que un cambio de signo de* + *á* —, *y habiendo hallado un valor positivo* L *de* x *que reduzca á* 0, *ó haga positivo á dicho polinomio, todo valor mayor que* L, *dado á* x, *hará tambien positivo al mismo polinomio.*

En efecto, tomemos un polinomio que despues de ordenado no presente mas que un cambio de signo de + á —, por ejemplo el polinomio anterior, que se puede escribir asi:

$$x^4\left(x+2-\left(\frac{1000}{x}+\frac{100}{x^2}+\frac{10}{x^4}\right)\right)\ldots\ldots [P].$$

Habiendo hallado un valor positivo L de x que reduzca á cero ó haga positivo al polinomio, todo valor mayor que L dado á x hará que aumente el minuendo de la diferencia interior al paréntesis, y que disminuya el sustraendo, y que por tanto dicha diferencia sea mayor que la que resultaba poniendo L en vez de x; luego si en este caso dicha diferencia era cero ó positiva, será necesariamente positiva cuando en lugar de x se sustituya un número mayor que L. El factor esterior x^4 tiene entonces un valor positivo; luego el producto P, ó el polinomio propuesto, será positivo poniendo en vez de x un número mayor que L.

46. *Hallar el límite superior de las raices positivas de una ecuacion.*

Descompóngase su primer miembro $f(x)$ en polinomios ó grupos de términos, tales que, estando ordenados, presenten un solo cambio de signo de + á —, hállese, dando á x los valores 1, 2, 3, 4, ..., el número positivo L que haga positivos á todos estos grupos ó polinomios parciales, ó aunque uno ó mas se anulen, los restantes resulten positivos, y dicho número L será el límite superior de las raices positivas de la ecuacion.

En efecto, segun el teorema anterior, todo número mayor que L hace positivos á todos los polinomios parciales, y por lo tanto al polinomio $f(x)$; luego ningun número mayor que L reduce á cero á $f(x)$; luego L es mayor que todas las raices de la ecuacion $f(x) = 0$, es decir que L es un límite superior de las raices positivas de la ecuacion.

Ejemplos. 1.° $x^4+7x^3-5x^2+4x-5=0.$

Descomponiendo el primer miembro de esta ecuacion en los dos polinomios

$$x^4+7x^3-5x^2, \text{ ó } x^2(x^2+7x-5), \text{ y } 4x-5,$$

se verá que 2 es un número, que sustituido en vez de x, hace positivos á los dos polinomios; luego 2 es un límite superior de las raices positivas de la ecuacion.

2.° $4x^3+5x^2-12x-2=0.$

Como el primer miembro no presenta mas que un cambio de signo de + á —, haremos $x = 0, 1, 2$, y hallaremos que 2 da un resultado positivo, y que por tanto 2 es un límite superior de las raices positivas de la ecuacion.

3.° $$x^5 - 5x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 69 = 0.$$

Descompondremos su primer miembro en los dos polinomios

$$x^5 - 5x^4 - 13x^3 \text{ ó } x^3(x^2 - 5x - 13), \text{ y } 17x^2 - 69,$$

y se hallará fácilmente que 7 es un límite superior de las raices positivas de la ecuacion.

47. Se llama *límite superior* de las raices negativas de una ecuacion todo número negativo cuyo valor absoluto sea mayor que los valores absolutos de estas raices, y *límite inferior* de las raices negativas todo número negativo cuyo valor absoluto sea menor que los valores absolutos de las raices negativas.

Hallar el límite superior de las raices negativas de una ecuacion.

Múdese en la ecuacion el signo de x, y las raices de la ecuacion transformada serán respectivamente iguales y de signo contrario á las de la propuesta (37). Hallando pues el límite superior de las raices positivas de la transformada en $-x$, y tomándolo negativamente, se tendrá el límite superior de las raices negativas de la ecuacion propuesta.

48. Hemos visto que, cuando en un polinomio $Ax^m \pm Bx^{m-1} \pm Cx^{m-2} \pm \ldots$ cuyo primer término es positivo, se sustituye en vez de x el límite superior de las raices positivas de la ecuacion que resulta igualando á cero dicho polinomio, el resultado es positivo: sea $-Ax^m \pm Bx^{m-1} \pm Cx^{m-2} \pm \ldots$ un polinomio cuyo primer término tiene el signo —, y que podemos escribir asi:

$$-(Ax^m \mp Bx^{m-1} \mp Cx^{m-2} \mp \ldots).$$

Sustituyendo en vez de x en el polinomio interior al paréntesis el límite superior de las raices positivas de la ecuacion

$$Ax^m \mp Bx^{m-1} \mp Cx^{m-2} \mp \ldots = 0,$$

el resultado es positivo; luego el resultado de la sustitucion de dicho límite en vez de x en la espresion

$$-(Ax^m \mp Bx^{m-1} \mp Cx^{m-2} \mp \ldots)$$

será negativo; y pues las ecuaciones

$$-Ax^m \pm Bx^{m-1} \pm Cx^{m-2} \pm \ldots = 0,$$

$$Ax^m \mp Bx^{m-1} \mp Cx^{m-2} \mp \ldots = 0$$

son una misma, el límite superior de las raices positivas de la una

es el límite superior de las raices positivas de la otra; luego sustituyendo en un polinomio $f(x)$ ordenado, y cuyo primer término es negativo, en vez de x el límite superior de las raices positivas de la ecuacion que resulta igualando á cero dicho polinomio, el resultado es negativo.

Concluimos pues, *que si en un polinomio* f(x), *cuyo primer término sea positivo ó negativo, se sustituye en vez de* x *el límite superior de las raices positivas de la ecuacion que resulta igualando á cero dicho polinomio, el resultado tiene el mismo signo que el primer término del polinomio.*

CAPÍTULO II.

Teoremas sobre la existencia de las raices reales.

49. *Si dos números cualesquiera sustituidos en vez de* x *en el primer miembro de una ecuacion*

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots + L = 0$$

dan resultados de signo contrario, la ecuacion tiene por lo menos una raiz real comprendida entre dichos dos números.

Sean p y q dos números cualesquiera, positivos, negativos, ó uno positivo y otro negativo, tales que $f(p)$ y $f(q)$ (que (11) son los resultados de la sustitucion de p y q en vez de x en el polinomio $f(x)$) sean de signo contrario; digo que la ecuacion tendrá por lo menos una raiz real comprendida entre p y q.

Supongamos que $p < q$: imaginemos que x vaya creciendo por grados insensibles desde p hasta q, la funcion $f(x)$ variará tambien por grados insensibles desde el valor $f(p)$ hasta el valor $f(q)$ (28); luego $f(x)$ pasará por todos los estados de magnitud comprendidos entre $f(p)$ y $f(q)$; pero como $f(p)$ y $f(q)$ son de signo contrario, y los valores de $f(x)$ son finitos, cualquiera que sea el valor finito de x, se infiere que 0 es un valor intermedio entre ellos, y que por tanto $f(x)$ pasará por 0. Luego entre p y q existe un número, que sustituido en $f(x)$ anula á esta funcion, ó es raiz de la ecuacion $f(x) = 0$.

Nota 1.ª Acabamos de demostrar que entre p y q existe un número, raiz de la ecuacion $f(x) = 0$; pero esto no quiere decir que no pueda existir mas que una sola raiz comprendida entre p y q; pues $f(x)$ podrá tener valores que vayan creciendo hasta cierto punto, que vayan disminuyendo en seguida, que luego vuelvan á crecer para disminuir de nuevo, y asi sucesivamente: de modo que podrá suceder muy bien que entre p y q existan varios valore

de x que sean raices de la ecuacion $f(x) = 0$: hé aquí por qué se ha dicho en el teorema que entre p y q existe por lo menos una raiz.

50. *Si en el primer miembro de una ecuacion*

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + L = 0$$

se sustituyen en vez de x *dos números* p *y* q *que comprendan un número impar de raices, los resultados* f(p) *y* f(q) *tendrán diferente signo; y si los números* p *y* q *comprenden un número par de raices, ó no comprenden ninguna, los resultados* f(p) *y* f(q) *tendrán el mismo signo.*

1.° Sea $p < q$: supongamos que estos dos números comprendan un número impar de raices; y para fijar las ideas, admitamos que sean tres a, b, c. Será $f(x)$ divisible por $(x - a)(x - b)(x - c)$, y llamando al cociente $f_1(x)$, tendremos la identidad

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) f_1(x).$$

Por consiguiente

$$f(p) = (p - a)(p - b)(p - c) f_1(p),$$
$$f(q) = (q - a)(q - b)(q - c) f_1(q).$$

Las cantidades $f_1(p)$ y $f_1(q)$ tienen el mismo signo. Para demostrarlo, admitamos que $f_1(p)$ y $f_1(q)$ sean números de signo contrario : estos dos números $f_1(p$ y $f_1(q)$ son los resultados de la sustitucion de p y q en vez de x en el primer miembro de la ecuacion

$$f_1(x) = 0;$$

luego p y q comprenderian por lo menos una raiz d de la ecuacion $f_1(x) = 0$; y como toda raiz d de esta ecuacion es raiz de la propuesta $f(x) = 0$ (*a*), resultaria que entre p y q estarian comprendidas por lo menos cuatro raices de esta ecuacion; contra la suposicion.

Habiendo demostrado que las cantidades $f_1(p)$ y $f_1(q)$ son del mismo signo, podrán ser las dos positivas ó las dos negativas: si son positivas, como p es menor que a, b y c, será evidentemente $f(p)$ negativa; y como q es mayor que a, b y c, será $f(q)$ positiva: si $f_1(p)$ y $f_1(q)$ son negativas, será $f(p)$ positiva y $f(q)$ negativa; luego $f(p)$ y $f(q)$ son en ambos casos de signo contrario.

2.° Si los números p y q comprenden un número par de raices, se demostrará del mismo modo que $f(p)$ y $f(q)$ son del mismo signo.

(*a*) Si tenemos

$$f(x) = f_1(x) \times f_2(x),$$

todo valor de x que anule á uno de estos dos factores, anula al producto, ó lo que es igual, las raices de las ecuaciones $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ son tambien raices de la ecuacion $f(x) = 0$.

3.° Si p y q no comprenden ninguna raiz, los resultados $f(p)$ y $f(q)$ son del mismo signo; pues si fuesen de signo contrario, p y q comprenderian por lo menos una raiz (49); contra lo supuesto.

Reciprocamente, *si dos números sustituidos en una ecuacion en vez de* x *dan resultados de diferente signo, comprenderán un número impar de raices; y si los resultados son del mismo signo, comprenderán un número par, ó no comprenderán ninguna* (Geometria 20).

51. *Toda ecuacion de grado impar tiene un número impar de raices reales de signo contrario al de su último término.*

Sea la ecuacion de grado impar

$$Ax^{2m+1} \pm Bx^{2m} \pm \ldots . - K = 0.$$

Suponemos en primer lugar que el último término de la ecuacion es negativo; y vamos á demostrar que tendrá un número impar de raices reales positivas.

Haciendo $x = 0$, el resultado es el último término, y por tanto es negativo. Haciendo $x = L$, limite superior de las raices positivas de la ecuacion, el resultado será positivo (46); luego (50, *recip.*) entre 0 y L habrá un número impar de raices comprendidas; es decir que la ecuacion tendrá un número impar de raices reales positivas.

Supongamos ahora que la ecuacion de grado impar tenga su último término positivo, y sea

$$Ax^{2m+1} \pm Bx^{2m} \pm \ldots + K = 0:$$

digo que tendrá un número impar de raices reales negativas.

En efecto, mudemos en la ecuacion propuesta x en $-x$, y la ecuacion transformada será

$$-Ax^{2m+1} \pm Bx^{2m} \mp \ldots . + K = 0.$$

Mudando á todos los términos de esta ecuacion los signos, tendremos

$$Ax^{2m+1} \pm Bx^{2m} \pm \ldots . - K = 0;$$

ecuacion cuyo primer término es positivo y su último término negativo; luego, segun el primer caso, esta ecuacion tiene un número impar de raices reales positivas. Mas sabemos que (37) la ecuacion transformada y la propuesta tienen sus raices respectivamente iguales y de signo contrario; luego la ecuacion propuesta tiene un número impar de raices reales negativas.

Corolario. *Toda ecuacion de grado impar tiene por lo menos una raiz real de signo contrario al de su último término.*

52. *Toda ecuacion de grado par cuyo último término es n-*

gativo, tiene un número impar de raices reales positivas, y un número tambien impar de raices reales negativas.

Haciendo $x = 0$ en dicha ecuacion, el resultado, que es el último término, es negativo. Haciendo $x = L$, limite superior de las raices positivas, el resultado es positivo (46): luego entre 0 y L hay un número impar de raices reales, las cuales, por ser mayores que 0 y menores que L, serán positivas.

Mudemos x en $-x$ en la ecuacion: como la ecuacion propuesta es de grado par, el primer término de la transformada será positivo, y el último término el mismo que el de la propuesta, esto es negativo; luego, segun el primer caso, la ecuacion transformada tendrá un número impar de raices reales positivas; luego (37) la ecuacion propuesta tendrá un número impar de raices reales negativas.

Corolario. *Toda ecuacion de grado par, cuyo último término sea negativo, tiene por lo menos una raiz real positiva y una raiz real negativa.*

53. *Si una ecuacion no tiene mas que raices imaginarias: 1.° será de grado par, 2.° su último término será positivo, 3.° sustituyendo en vez de* x *números cualesquiera, los resultados serán siempre positivos.*

1.° Si la ecuacion fuera de grado impar, tendria por lo menos una raiz real (51, *Corol.*), contra lo supuesto.

2.° Si el último término de esta ecuacion de grado par fuera negativo, la ecuacion tendria por lo menos una raiz real positiva y una raiz real negativa, contra lo supuesto.

3.° Si algun resultado fuese negativo, como haciendo $x = 0$, el resultado, que es el último término, es positivo, tendria la ecuacion un número impar de raices reales (50, *recip.*), contra lo supuesto.

54. *Si una ecuacion*

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots\ldots + Kx + L = 0,$$

cuyos coeficientes son reales (a), *tiene la raiz imaginaria* $p + p\sqrt{-1}$, *tambien tiene la raiz* $p - q\sqrt{-1}$, *conjugada de la primera.*

En efecto, siendo $p + q\sqrt{-1}$ raiz de la ecuacion propuesta, tendremos la igualdad

$$A(p + q\sqrt{-1})^m + B(p + q\sqrt{-1})^{m-1}$$
$$+ C(p + q\sqrt{-1})^{m-2} + \ldots\ldots + K(p + q\sqrt{-1}) + L = 0:$$

(a) Asi lo hemos supuesto en todo lo que precede.

desenvolviendo cada uno de estos términos, tendrá la forma $P + Q\sqrt{-1}$ (*Alg. elem.* 172); luego todo este polinomio tendrá la misma forma: tendremos pues

$$P + Q\sqrt{-1} = 0;$$

y por consiguiente

$$P = 0,\ Q = 0.$$

Si en el primer miembro de la ecuacion propuesta sustituimos en vez de x la cantidad imaginaria $p - q\sqrt{-1}$, el resultado solo se diferenciará del anterior $P + Q\sqrt{-1}$ en el signo de $\sqrt{-1}$, es decir que el resultado será $P - Q\sqrt{-1}$; y pues queda demostrado que $P = 0$, $Q = 0$, se infiere que $P - Q\sqrt{-1}$ es cero, y que por tanto $p - q\sqrt{-1}$ es raiz de la ecuacion propuesta.

55. *Si en una ecuacion* $f(x) = 0$, *cuyos coeficientes son conmensurables, existe una raiz* $p + \sqrt{q}$ (*siendo* p *y* q *números conmensurables*), *existe tambien la raiz* $p - \sqrt{q}$.

En efecto, siendo $p + \sqrt{q}$ raiz de la ecuacion $f(x) = 0$, será

$$f(p + \sqrt{q}) = 0,$$

ó desarrollando esta espresion por la fórmula de Taylor, será

$$f(p) + f'(p).\sqrt{q} + \frac{f''(p)}{2}.\,q + \frac{f'''(p)}{2.3}\,q\sqrt{q} + \frac{f^{\text{v}}(p)}{2.3.4}\,q^2 + \frac{f^{\text{v}}(p)}{2.3.4.5}\,q^2\sqrt{q} + \ldots = 0,$$

ó llamando, para abreviar, P al polinomio conmensurable de este desarrollo, y Q al coeficiente de $\sqrt{q}$, será

$$P + Q\sqrt{q} = 0;$$

igualdad que nos da

$$P = 0,\quad Q = 0:$$

pues si uno de estos dos polinomios no fuese cero, la igualdad nos dice que tampoco lo seria el otro, y por tanto tendríamos el resultado absurdo

$$P = -Q\sqrt{q},$$

es decir una cantidad conmensurable igual á una inconmensurable: luego los dos polinomios P y Q son iguales á 0.

Sustituyendo en la ecuacion en vez de x $p - \sqrt{q}$, el resultado solo se diferenciará del anterior en el signo de $\sqrt{q}$, es decir que el resultado será $P - Q\sqrt{q}$: y pues hemos demostrado que $P = 0$, $Q = 0$; se infiere que

$$P - Q\sqrt{q} = 0;$$

y por consiguiente $p - \sqrt{q}$ es raiz de la ecuacion.

56. *El número de raices imaginarias de una ecuacion* $f(x) = 0$ *es par.*

Dividiendo el primer miembro de la ecuacion por el producto de los factores binomios correspondientes á las raices reales, el cociente igualado á cero tendrá por raices todas las demás de la ecuacion propuesta, es decir, todas las raices imaginarias de esta ecuacion; luego dicho cociente igualado á cero debe ser de grado par (53), y por tanto el número de sus raices debe ser par; luego el número de raices imaginarias de la ecuacion propuesta es par.

CAPÍTULO III.

Raices conmensurables.

Artículo 1.°

Raices enteras.

57. Las raices conmensurables de una ecuacion pueden ser enteras ó fraccionarias: tratemos en primer lugar de hallar las raices enteras.

Consideremos, para hallar la regla de su investigacion, una ecuacion cuyos coeficientes sean enteros; y para fijar las ideas, tomemos la ecuacion de cuarto grado

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0,$$

en que A, B, C... son números enteros, el primero positivo y los demas positivos ó negativos.

Sea a una raiz entera de esta ecuacion: tendremos

$$Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0,$$

y por consiguiente, dividiendo los dos miembros de esta igualdad por a, será

$$Aa^3 + Ba^2 + Ca + D + \frac{E}{a} = 0.$$

Esta igualdad prueba que *el último término de una ecuacion, cuyos coeficientes son todos enteros, es divisible por cada una de sus raices enteras.*

Esta sola condicion seria suficiente para hallar las raices enteras de una ecuacion de coeficientes enteros; pues, hallados los limites superiores de las raices positivas y negativas de una ecua-

cion, no habria mas que sustituir en dicha ecuacion todos los divisores simples y compuestos del último término, comprendidos entre dichos límites, y tomados positiva y negativamente; y aquellos que redujesen á cero al primer miembro, serian raices de la ecuacion. Pero la raiz a debe además satisfacer á otras condiciones que abrevian el cálculo.

Hagamos $$\frac{E}{a} = F \qquad [1],$$

y la igualdad anterior será

$$Aa^3 + Ba^2 + Ca + D + F = 0,$$

y dividiendo en seguida por a, tendremos

$$Aa^2 + Ba + C + \frac{D + F}{a} = 0;$$

luego $D + F$ debe ser divisible por a.

Hago $$\frac{D + F}{a} = F' \qquad [2],$$

y la igualdad anterior será

$$Aa^2 + Ba + C + F' = 0,$$

y dividiendo en seguida por a, tendré

$$Aa + B + \frac{C + F'}{a} = 0;$$

luego $C + F'$ debe ser divisible por a.

Hago $$\frac{C + F'}{a} = F'' \qquad [3],$$

y la igualdad anterior será

$$Aa + B + F'' = 0,$$

y dividiendo en seguida por a, tendré

$$A + \frac{B + F''}{a} = 0 \qquad [4];$$

luego $B + F''$ debe ser divisible por a, y sumando este cociente con A, la suma es cero.

Vemos, pues, que toda raiz entera de una ecuacion de coeficientes enteros satisface á las condiciones [1], [2], [3], [4].

Al contrario, todo número a que satisfaga á las ecuaciones [1], [2], [3], [4], es raiz de la ecuacion.

En efecto, elimino entre estas ecuaciones las cantidades F, F', F''; y para hacer esta eliminacion con brevedad, multi-

plico las ecuaciones [1], [2], [3], [4] respectivamente por a, a^2, a^3, a^4, y sumando en seguida las nuevas ecuaciones, resulta

$$Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0;$$

luego a es raiz de la ecuacion.

Luego, para que un número entero a sea raiz de una ecuacion de coeficientes enteros, es suficiente y necesario que satisfaga á las siguientes condiciones:

El último término ha de ser divisible por a; efectuando esta division, y añadiendo al cociente el coeficiente de x, la suma ha de ser divisible por a; efectuando esta division, y añadiendo al cociente el coeficiente de x^2, la suma ha de ser divisible por a; y asi sucesivamente, hasta que se añada el coeficiente del primer término, en cuyo caso la suma debe ser cero.

58. Esto supuesto, para hallar las raices enteras positivas de una ecuacion cuyos coeficientes son enteros, se hallará el límite superior de las raices positivas de la ecuacion, se descompondrá el último término en sus factores simples y compuestos, y se someterá cada factor del último término, factor menor que el límite, á las condiciones á que hemos visto debe satisfacer para ser raiz de la ecuacion.

En cuanto al factor 1, es preferible sustituirlo directamente en la ecuacion, para ver si la satisface.

59. Las raices enteras negativas se pueden hallar del mismo modo; ó mejor, mudando x en $-x$ en la ecuacion propuesta, hallando las raices enteras positivas de la transformada, y tomando en seguida estas raices con el signo —; pues ya se sabe (37) que las dos ecuaciones $f(x) = 0$ y $f(-x) = 0$ tienen sus raices respectivamente iguales y de signo contrario.

Ejemplos. 1.° Hallar las raices enteras de la ecuacion

$$2x^4 - 23x^3 + 77x^2 - 62x - 24 = 0.$$

El límite superior de las raices positivas es 12. El factor 1 no es raiz de la ecuacion; luego los factores de 24 que se han de someter á la prueba, son 2, 3, 4, 6, 8.

Cálculo para el factor 2.

$$\frac{-24}{2} = -12$$

$$-62$$

$$\frac{-74}{2} = -37$$

$$77$$

$$\frac{40}{2} = 20$$

$$-23$$

$$-3.$$

Habiendo hallado la suma 3, que no es divisible por 2, se infiere que este número no es raiz de la ecuacion.

Cálculo para el factor 3.

$$\frac{-24}{3} = -8$$
$$-62$$
$$-70$$

Como la suma — 70 no es divisible por 3, este número no es raiz de la ecuacion.

Cálculo por el factor 4.

$$\frac{-24}{4} = -6$$
$$-62$$
$$\frac{-68}{4} = -17$$
$$77$$
$$\frac{60}{4} = 15$$
$$-23$$
$$\frac{-8}{4} = -2$$
$$+2$$
$$0.$$

Como el 4 satisface á todas las condiciones, 4 es raiz de la ecuacion.

Cálculo para el factor 6.

$$\frac{-24}{6} = -4$$
$$-62$$
$$\frac{-66}{6} = -11$$
$$77$$
$$\frac{66}{6} = 11$$
$$-23$$
$$\frac{-12}{6} = -2$$
$$+2$$
$$0.$$

El 6 es tambien raiz de la ecuacion.

Cálculo para el factor 8.

$$\frac{-24}{8} = -3$$
$$-62$$
$$-65$$

Como la suma 65 no es divisible por 8, se infiere que 8 no es raiz de la ecuacion.

Si la ecuacion propuesta fuese de un grado inferior al cuarto, hallaríamos ahora sus raices enteras negativas; mas en el caso actual se puede reducir inmediatamente á ecuacion de segundo grado, dividiendo su primer miembro por el producto

$$(x-4)(x-6) = x^2 - 10x + 24.$$

El cociente es $2x^2 - 3x - 1$, que igualado á cero, nos da las dos raices $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Estas dos últimas raices pueden hallarse mas brevemente, porque la suma de las dos es (36) $\frac{23}{2} - 10 = \frac{3}{2}$, y su producto $-\frac{1}{2}$; luego son las raices de la ecuacion

$$u^2 - \frac{3}{2}u - \frac{1}{2} = 0.$$

2.° $x^5 + 5x^4 + x^3 - 16x^2 - 20x - 16 = 0.$

El límite superior de las raices positivas es 3. El factor 1 no es raiz de la ecuacion; luego el único número que hay que comprobar es 2. Efectuando el cálculo, se halla que 2 es raiz. Ahora, si se quiere, puede quitarse el factor $x - 2$ del primer miembro y hallar las raices enteras negativas del cociente igualado á cero; pero nosotros no suprimiremos dicho factor $x - 2$: hallaremos antes las raices enteras negativas. Para esto mudo x en $-x$, y tendré la nueva ecuacion (38)

$$x^5 - 5x^4 + x^3 + 16x^2 - 20x + 16 = 0,$$

cuyas raices tienen por límite superior 5. Como 1 no es raiz de esta ecuacion, los factores de 16 que hay que someter á prueba, son 2 y 4. Efectuando el cálculo, se halla qne 2 y 4 son raices de la ecuacion transformada; y por consiguiente -2 y -4 son raices de la ecuacion propuesta.

Dividiendo ahora el primer miembro de la ecuacion propuesta por el producto $(x-2)(x+2)(x+4)$, el cociente $x^2 + x + 1$, igualado á cero, nos dá las otras dos raices de la ecuacion $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

60. Vemos, segun el método que acabamos de esplicar para hallar las raices enteras positivas, que no hay que someter á prueba mas que aquellos divisores del último término, inferiores al límite superior de las raices positivas: pero aun asi, si el último

término tiene muchos divisores menores que el límite, el cálculo puede ser muy largo. El teorema siguiente nos da el medio de escluir varios de estos divisores.

Si en el primer miembro de una ecuacion $f(x) = 0$ *de coeficientes enteros se sustituye en vez de* x *un número entero* α, *el resultado* $f(\alpha)$ *es divisible por la diferencia* $\alpha - a$ *entre dicho número y toda raiz entera* a *de la ecuacion.*

En efecto, siendo a raiz de la ecuacion, $f(x)$ es divisible por $x - a$, y llamando $f_1(x)$ al cociente, que será un polinomio de coeficientes enteros, tendremos la identidad

$$f(x) = (x - a)\, f_1(x);$$

luego

$$f(\alpha) = (\alpha - a)\, f_1(\alpha);$$

y pues $f_1(\alpha)$ es un número entero, se ve que $f(\alpha)$ es divisible por $\alpha - a$.

Por consiguiente todo factor del último término que restado de α no dé un resto que sea divisor de $f(\alpha)$, no puede ser raiz de la ecuacion.

El número mas ventajoso, que puede sustituirse en lugar de x en el primer miembro de la ecuacion, es 1; y por tanto, todo factor del último término que disminuido en 1 no dé un resto que sea divisor de $f(1)$, no puede ser raiz de la ecuacion, y quedará escluido.

Nota. Si sucediere que $f(1)$ fuese cero, será 1 raiz de la ecuacion; se simplificará esta dividiendo $f(x)$ por $x - 1$, y se aplicará en seguida al cociente igualado á cero la regla de esclusion que acabamos de hallar.

Ejemplo. $x^4 - 41x^3 + 16x^2 + 720x - 2592 = 0$.

El límite de las raices positivas es 41: los factores del último término, menores que el límite, son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36.

El resultado de la sustitucion de 1 en vez de x es -1750.

Aplicando ahora la regla de esclusion, se verá que quedan escluidos los factores 4, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32; y por tanto los únicos factores que hay que comprobar son 2, 3, 6, 8, 36.

Efectuando el cálculo (58, al fin), se halla que 3, 6 y 36 son raices de la ecuacion. Dividiendo el primer miembro de esta por el producto $(x - 3)(x - 6)(x - 36)$, resulta el cociente $x + 4$, que igualado á cero, nos dá la raiz -4; la cual pudiera hallarse mas facilmente en el caso actual, puesto que la suma de las cuatro raices de la ecuacion es 41 (36): y como las tres raices que conocemos suman $3 + 6 + 36 = 45$, resulta que la cuarta raiz es -4.

Artículo 2.°

Raices enteras iguales.

61. Puede suceder que una ecuacion tenga raices enteras iguales: el método que acabamos de esponer, no determina las veces que cada raiz entra en la ecuacion. Para conseguir esto, se divide el primer miembro por el producto de los factores binomios correspondientes á las raices enteras halladas, y se verá si el cociente igualado á cero tiene aun algunas de dichas raices.

Ejemplo. $x^6+3x^5-15x^4-35x^3+90x^2+108x-216=0.$

El límite de las raices positivas es 4; 1 no es raiz; luego no hay que comprobar mas que 2 y 3. Efectuando el cálculo se halla que 2 es raiz.

Para hallar las raices enteras negativas, mudo x en $-x$ y tengo (38)

$$x^6-3x^5-15x^4+35x^3+90x^2-108x-216=0.$$

El límite superior de las raices positivas de esta ecuacion es 7; luego como 1 no es raiz de la ecuacion, no hay que comprobar mas que 2, 3, 4 y 6, factores de 216.

Hecha la comprobacion, se halla que 3 es raiz, y por consiguiente -3 es raiz de la ecuacion propuesta.

Dividiendo el primer miembro de esta por $(x-2)(x+3)$, el cociente igualado á 0 es

$$x^4+2x^3-11x^2-12x+36=0.$$

Esta ecuacion no puede tener mas raices enteras que 2 y -3: sometiendo estas á prueba, se halla que en efecto son raices de la misma. Dividiendo el primer miembro de la última ecuacion por

$$(x-2)(x+3)=x^2+x-6,$$

se halla x^2+x-6, que igualado á 0, nos dá $x=2$, $x=-3$.

Luego cada una de las raices 2 y -3 está repetida tres veces en la ecuacion propuesta.

Artículo 3.°

Raices conmensurables fraccionarias.

62. Despues de dividir el primer miembro de una ecuacion por el producto de los factores binomios correspondientes á las raices enteras, el cociente igualado á cero podrá tener raices conmensurables fraccionarias, cuya investigacion se reduce á la de las raices enteras de otra ecuacion. Para hacerlo ver, demostraremos el teorema siguiente.

Toda ecuacion de la forma

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots\ldots + Tx + V = 0,$$

en que todos los coeficientes son enteros, no puede tener ninguna raiz conmensurable fraccionaria.

Admitamos que esta ecuacion tenga por raiz el quebrado $\frac{a}{b}$, que supondremos reducido á sus menores términos, ó bien, que estos son números primos entre si: tendremos

$$\frac{a^m}{b^m} + \frac{Pa^{m-1}}{b^{m-1}} + \frac{Qa^{m-2}}{b^{m-2}} + \ldots\ldots + \frac{Ta}{b} + V = 0.$$

Multiplicando todos los términos de esta ecuacion por b^{m-1}, será

$$\frac{a^m}{b} + Pa^{m-1} + Qa^{m-2}b + \ldots\ldots + Tab^{m-2} + Vb^{m-1} = 0,$$

de donde resulta

$$\frac{a^m}{b} = -Pa^{m-1} - Qa^{m-2}b - \ldots\ldots - Tab^{m-2} - Vb^{m-1}.$$

El primer miembro de esta igualdad es un quebrado irreducible, pues está demostrado, que si dos números son primos entre si, dos potencias cualesquiera de dichos números son tambien números primos entre si (*Aritm.* 70, *Corol.*). El segundo miembro es entero; luego la igualdad anterior es imposible. Luego la ecuacion no tiene ninguna raiz conmensurable fraccionaria.

De este teorema se infiere, que si una ecuacion de coeficientes enteros tiene alguna raiz conmensurable fraccionaria, su primer término tendrá un coeficiente $A > 1$.

Esto supuesto, dada una ecuacion

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots = 0,$$

cuyos coeficientes sean enteros, y tratando de hallar sus raices fraccionarias, caso de que las tenga, transformaremos esta ecuacion en otra de la forma

$$y^m + Py^{m-1} + Qy^{m-2} + \ldots = 0,$$

cuyos coeficientes P, Q,... sean todos enteros. Para esto, haremos (40) $x = \frac{y}{h}$, y sustituyendo este valor en la ecuacion propuesta, tendremos la transformada

$$\frac{Ay^m}{h^m} + \frac{By^{m-1}}{h^{m-1}} + \frac{Cy^{m-2}}{h^{m-2}} + \ldots\ldots = 0,$$

ó

$$y^m + \frac{Bh}{A}y^{m-1} + \frac{Ch^2}{A}y^{m-2} + \ldots\ldots = 0,$$

y ahora se determinará por tanteo el menor valor de h, que haga que todos los coeficientes de esta ecuacion sean enteros.

Hallaremos en seguida las raices enteras de la ecuacion transformada, y como $x = \frac{y}{h}$, sustituyendo en esta relacion los valores enteros de y, tendremos los fraccionarios de x, esto es, las raices fraccionarias de la ecuacion propuesta.

Ejemplo. Sea la ecuacion

$$12x^3 + 8x^2 - 13x + 3 = 0,$$

que, es fácil ver, no tiene raices enteras. Tratemos de hallar sus raices conmensurables fraccionarias, si las tiene.

Para esto, haremos $x = \frac{y}{h}$, y sustituyendo, resultará la ecuacion transformada

$$y^3 + \frac{2h}{3}y^2 - \frac{13h^2}{12}y + \frac{h^3}{4} = 0.$$

Ahora se verá fácilmente que $h = 6$ hace enteros á todos los coeficientes de esta ecuacion; y que por consiguiente la ecuacion transformada es

$$y^3 + 4y^2 - 39y + 54 = 0.$$

Hallemos las raices enteras de esta ecuacion.

El límite de sus raices positivas es 4; 1 no es raiz de la ecuacion; luego solo tendremos que comprobar los factores 2 y 3 del último término.

Hecha esta comprobacion (57, al fin), se halla que 2 y 3 son raices de esta ecuacion. La tercera raiz, á la que llamaremos α, se hallará por la relacion

$$2 + 3 + \alpha = -4,$$

de donde $$\alpha = -9.$$

Como ahora tenemos la relacion $x = \frac{y}{6}$, los valores de x correspondientes á los que hemos hallado de y, serán

$$x = \frac{1}{3},\ x = \frac{1}{2},\ x = -\frac{3}{2}.$$

CAPÍTULO III.

Raices inconmensurables.

ARTÍCULO 1.°

Máximo comun divisor de dos polinomios enteros f(x) y f_1(x).

63. Sabemos (35) que un polinomio $f(x)$ puede descomponerse en el producto de tantos factores binomios de primer grado en x como unidades tiene el grado de dicho polinomio.

Un polinomio entero f(x) *no puede descomponerse mas que de un solo modo en factores binomios, es decir que no pueden ser idénticos dos productos de factores binomios, que no contengan los mismos factores binomios; y tampoco pueden ser idénticos dos productos compuestos de los mismos factores binomios, si alguno de estos factores tiene en uno de los dos productos diferente esponente que en el otro.*

Supongamos que $f(x)$, descompuesto en factores binomios, sea

$$(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^p.$$

Demostremos en primer lugar que este producto no puede ser idéntico á otro producto de factores binomios en el cual haya un factor binomio $x-\alpha$ diferente de $x-a$, $x-b$ y $x-c$.

En efecto, dando á x el valor α, el segundo producto se reduciria á 0, y no el primero; luego no son idénticos, ó no forman identidad, dichos dos productos (*Alg. elem.* 3).

Demostremos ahora que el producto

$$(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^p$$

no puede ser idéntico á otro producto de los mismos factores binomios, teniendo alguno de dichos binomios en el primer producto un esponente diferente del que tiene en el segundo; es decir, que no puede ser idéntico á

$$(x-a)^{m'}(x-b)^{n'}(x-c)^{p'}.$$

En efecto, supongamos en primer lugar que sea $m > m'$: partiendo los dos productos por $(x-a)^{m'}$, el primer cociente seria

$$(x-a)^{m-m'}(x-b)^n(x-c)^p,$$

y el segundo

$$(x-b)^{n'}(x-c)^{p'}:$$

mas hemos demostrado en el primer caso que estos dos nuevos productos, que no constan de los mismos binomios, no son idé ticos; luego tampoco son idénticos los dos productos propues

Del mismo se demuestra que tampoco son idénticos estos dos productos cuando $m < m'$; y asi queda demostrado el teorema en sus dos partes.

64. Se llama *máximo comun divisor* de dos polinomios enteros $f(x)$ y $f_1(x)$ el producto de las potencias de menor grado de los factores binomios comunes á estos dos polinomios.

Asi, si $$f(x) = 8(x-a)^7(x-b)^2(x-c),$$
y $$f_1(x) = 4(x-a)^4(x-b)(x-d)^2,$$
el producto de las potencias de menor grado de los factores binomios $x-a$ y $x-b$, únicos binomios comunes á los dos polinomios, ó el $m.c.d$ de los dos polinomios, es $(x-a)^4(x-b)$.

65. Segun esta definicion, los coeficientes ó factores numéricos que acompañen á los productos de los factores binomios, no influyen en el $m.c.d.$ de los mismos, y por tanto se pueden multiplicar ó partir el uno ó los dos polinomios por un número cualquiera sin que se altere su $m.c.d$; porque ninguna de estas operaciones altera al producto de las potencias de menor grado de los factores binomios comunes, que es el $m.c.d$ de los dos polinomios.

Asi, el $m.c.d.$ de los polinomios
$$f(x) = 4(x-1)^3(x-2)^2,$$
$$f_1(x) = 6(x-1)^2(x-2)$$
es $$(x-1)^2(x-2),$$
el mismo que el de los polinomios
$$8(x-1)^3(x-2)^2$$
y $$6(x-1)^2(x-2),$$
el mismo que el de los polinomios
$$(x-1)^3(x-2)^2$$
y $$6(x-1)^2(x-2),$$
el mismo que el de los polinomios
$$(x-1)^3(x-2)^2$$
y $$(x-1)^2(x-2).$$

Nota. Si supiéramos resolver las ecuaciones
$$f(x)=0, f_1(x)=0,$$
sabríamos descomponer los polinomios $f(x)$ y $f_1(x)$ en productos de factores binomios, y por consiguiente sabríamos hallar el

m. c. d. de dichos dos polinomios. Mas la gran dificultad del álgebra, y aun el problema principal de esta ciencia, consiste en la resolucion de las ecuaciones. Nos proponemos pues actualmente hallar el *m. c. d.* de dos polinomios enteros $f(x)$ y $f_1(x)$ sin resolver las ecuaciones

$$f(x) = 0 \text{ y } f_1(x) = 0,$$

y haciendo servir, por el contrario, esta teoria para facilitar la resolucion de las ecuaciones.

66. *Si* f(x) *y* $f_1(x)$ *son dos polinomios enteros, el primero de un grado mayor ó por lo menos igual al de* $f_1(x)$, *pero no divisible por* $f_1(x)$; *si tomamos por cociente incompleto de la division de* f(x) *por* $f_1(x)$ *un número, ó una funcion entera de* x, *y hallamos el resto correspondiente* $f_r(x)$, *el* m. c. d. *de* f(x) *y* $f_1(x)$ *será el mismo que el de* $f_1(x)$ *y* $f_r(x)$.

Llamemos Q al número, ó á la funcion entera arbitraria de x, que tomamos por cociente incompleto de la division de $f(x)$ por $f_1(x)$: tendremos la identidad

$$f(x) = Qf_1(x) + f_r(x) \qquad [A].$$

Sea δ una funcion entera de x que sea divisor de $f(x)$ y $f_1(x)$: tendremos, dividiendo por δ los dos miembros de la identidad (A), esta otra

$$\frac{f(x)}{\delta} - Q\frac{f_1(x)}{\delta} = \frac{f_r(x)}{\delta}.$$

Siendo δ divisor de $f(x)$ y de $f_1(x)$, el primer miembro de esta identidad es una funcion entera de x; luego el segundo es tambien una funcion entera de x; luego δ es divisor de $f_r(x)$.

Supongamos ahora que la funcion δ sea divisor de $f(x)$ y $f_r(x)$: tendremos la identidad

$$\frac{f(x)}{\delta} = Q\frac{f_1(x)}{\delta} + \frac{f_r(x)}{\delta}.$$

Siendo δ divisor de $f_1(x)$ y de $f_r(x)$, el segundo miembro de esta identidad es una funcion entera de x; luego el primer miembro es tambien una funcion entera de x, y por tanto δ es divisor de $f(x)$.

Queda pues demostrado que toda funcion entera de x, que sea divisor de $f(x)$ y $f_1(x)$, es tambien divisor de $f_r(x)$; y al contrario, que toda funcion entera de x, que sea divisor de $f_1(x)$ y de $f_r(x)$, es divisor de $f(x)$: luego las dos funciones $f(x)$ y $f_1(x)$ tienen los mismos divisores que las dos $f_1(x)$ y $f_r(x)$; luego el *m. c. d.* de las dos primeras es tambien el mismo que el de las dos segundas.

67. *Todo polinomio entero* $f_1(x)$, *que sea divisor de otro polinomio entero* $f(x)$, *es el* m. c. d. *de ambos polinomios.*

Supongamos que

$$f(x) = (x - a)^7(x - b)^2(x - c).$$

Siendo por hipótesi $f_1(x)$ divisor de $f(x)$, si se descompone $f_1(x)$ en factores binomios, no podrá contener factor binomio alguno diferente de los de $f(x)$, esto es, diferente de $x - a$, $x - b$ y $x - c$, ni podrá contener á ninguno de estos factores con mayor esponente que el que dicho factor tenga en $f(x)$: pues si $f_1(x)$ tuviese algun factor binomio diferente de los de $f(x)$, ó contuviese algun factor de $f(x)$ con mayor esponente que el que tiene en $f(x)$, como por hipótesi $f_1(x)$ es divisor de $f(x)$, sacaríamos en consecuencia que $f(x)$ podria descomponerse en factores binomios de dos modos diferentes; lo que, segun se ha demostrado en (65), no puede suceder. Esto supuesto, será, por ejemplo,

$$f_1(x) = 3\,(x - a)\,(x - b)^2(x - c).$$

Este polinomio es evidentemente el producto de las potencias de menor grado de los factores binomios $x - a$, $x - b$, $x - c$, únicos comunes á $f(x)$ y $f_1(x)$; luego

$$(x - a)(x - b)^2(x - c) \text{ ó } f_1(x)$$

es el *m. c. d.* de $f(x)$ y $f_1(x)$, conforme á la conclusion del teorema.

68 *Pasemos ya á hallar el* m. c. d. *de dos polinomios enteros* $f(x)$ *y* $f_1(x)$.

Supongamos que estos dos polinomios estén ordenados, y que el polinomio $f(x)$ sea de un grado mayor, ó por lo menos igual al de $f_1(x)$: si $f_1(x)$ fuese divisor de $f(x)$, seria, segun el teorema último, $f_1(x)$ el *m. c. d.* de $f(x)$ y de $f_1(x)$; pero si la division de $f(x)$ por $f_1(x)$ es inexacta, y es $f_2(x)$ el residuo de esta division (*Alg. elem.*, 46), como el *m. c. d.* de $f(x)$ y $f_1(x)$ es el mismo que el de $f_1(x)$ y $f_2(x)$, pues que el cociente obtenido por la regla ordinaria de la division es un número ó una funcion entera de x, se infiere que la cuestion está reducida á hallar el *m. c. d.* de $f_1(x)$ y $f_2(x)$, polinomios de grado inferior á los de $f(x)$ y $f_1(x)$. Si $f_2(x)$ fuere divisor de $f_1(x)$, $f_2(x)$ seria el *m. c. d.* de $f_1(x)$ y $f_2(x)$, y por lo tanto seria tambien el *m. c. d.* de $f(x)$ y $f_1(x)$: pero si dividiendo $f_1(x)$ por $f_2(x)$ queda un residuo $f_3(x)$, como el *m. c. d.* de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ es el mismo que el de $f_2(x)$ y $f_3(x)$, la cuestion está reducida á hallar el *m. c. d.* de estos dos polinomios de menor grado que los anteriores $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Si $f_3(x)$ es divisor de $f_2(x)$, $f_3(x)$ será el *m. c. d.* de $f_2(x)$ y $f_3(x)$, y por consiguiente de $f_1(x)$ y $f_2(x)$, y siendo de estos, lo será de $f(x)$ y $f_1(x)$: pero si al dividir $f_2(x)$

por $f_3(x)$, queda un residuo $f_4(x)$, la cuestion quedará reducida á hallar el *m. c. d.* de los dos polimios $f_3(x)$ y $f_4(x)$. Continuando del mismo modo, llegaremos á un residuo independiente de x, puesto que los esponentes de los primeros términos de los residuos $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$..... disminuyen sucesivamente en un número entero: por consiguiente dicho residuo será 0 ó un número entero. Si el residuo es 0, el último divisor será el *m. c. d.* pedido; y si es un número, como el último divisor y el residuo no tienen ningun divisor comun, funcion de x, se infiere que los dos polinomios propuestos tampoco tienen divisor comun alguno que sea funcion de x.

Es conveniente para la sencillez del cálculo que los diferentes términos de los cocientes tengan coeficientes enteros; y para esto, se principiará por suprimir todo factor numérico comun á los diferentes términos de cada uno de los dos polinomios, lo que no alterará á su *m. c. d.* (65); y si entonces el coeficiente del primer término del nuevo dividendo $f(x)$ no es divisible por el del primer término del nuevo divisor $f_1(x)$, se multiplicará $f(x)$ por el factor conveniente m, para que el primer término del producto $mf(x)$ sea divisible por el primer término de $f_1(x)$. Si habiendo hallado uno ó varios términos (de coeficientes enteros) en el cociente de la division de $f(x)$ ó de $mf(x)$ por $f_1(x)$, se llega, antes de llegar al residuo $f_2(x)$, á un resto $f_r(x)$, cuyo primer término tenga un coeficiente no divisible por el coeficiente del primer término del divisor, se multiplicará dicho resto $f_r(x)$ por un factor conveniente n para que el término siguiente del cociente tenga un coeficiente entero; y esto no puede alterar al *m. c. d.* que se busca, porque, segun el teorema (66), el *m. c. d.* de $f(x)$ ó $mf(x)$ y $f_1(x)$ es el mismo que el de $f_1(x)$ y $f_r(x)$, y este es el que es mismo que el de $nf_1(x)$ y $f_r(x)$.

Cuando se llegue al residuo $f_2(x)$ de esta division, tenemos que dividir $f_1(x)$ por $f_2(x)$; y para la sencillez de la operacion suprimiremos todo factor numérico comun á los diferentes términos de $f_2(x)$; lo que no alterará al *m. c. d.* de $f_1(x)$ y $f_2(x)$, que es el mismo que el de $f(x)$ y $f_1(x)$.

Lo que acabamos de decir, que debe hacerse para evitar coeficientes fraccionarios, al partir $f(x)$ por $f_1(x)$, se hará tambien al partir $f_1(x)$ por $f_2(x)$, $f_2(x)$ por $f_3(x)$, etc.

Luego, *para hallar el* m. c. d. *de dos polinomios entero una variable, se ordenarán dichos polinomios, y linomio de mayor grado por el otro* (a). *Se divi*

(*a*) Si el grado de los dos polinomios es el mismo, los dos por el otro.

divisor por el residuo; y se continuará del mismo modo hasta llegar á un residuo 0, *en cuyo caso el último divisor será el* m. c. d. *pedido*; *ó hasta llegar á un residuo que sea un número, y en este caso los dos polinomios no tendrán ningun divisor comun funcion de* x.

Para evitar coeficientes fraccionarios, se principiará por suprimir todo factor comun á los diferentes términos de cada uno de los dos polinomios, y se multiplicarán el dividendo y los restos sucesivos por números convenientes. Cuando se llegue á un residuo, se suprimirá todo factor numérico comun á sus diferentes términos, antes de tomarle por divisor de la division siguiente.

Ejemplo. Hallar el *m. c. d.* de los polinomios

$$45x^5 - 135x^4 + 90x^3 - 45x^2 + 135x - 90,$$
$$30x^4 - 150x^3 + 300x^2 - 300x + 120.$$

El *m. c. d.* de los coeficientes del primero es 45, y el de los coeficientes del segundo es 30: suprimiendo en el primer polinomio el divisor 45, y en el segundo el divisor 30, los nuevos polinomios son

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 2,$$
$$x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4,$$

los cuales tienen el mismo *m. c. d.* que los dos polinomios propuestos (65).

Para hallar el *m. c. d.* de estos dos nuevos polinomios, haremos las operaciones que siguen:

Primera division.

$$\begin{array}{r|l}
x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 2 & x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 \\
\cline{2-2}
+ 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 4x & x + 2 \\
\cline{1-1}
2x^4 - 8x^3 + 9x^2 - x - 2 & \\
+ 10x^3 - 20x^2 + 20x - 8 & \\
\cline{1-1}
2x^3 - 11x^2 + 19x - 8 &
\end{array}$$

Como los términos de este residuo no tienen ningun divisor comun, lo tomaré, como está, por divisor.

Segunda division.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 & 2x^3 - 11x^2 + 19x - 10 \\
\cline{2-2}
2x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 20x + 8 & x + 1 \\
+ 11x^3 - 19x^2 + 10x & \\
\hline
x^3 + x^2 - 10x + 8 & \\
2x^3 + 2x^2 - 20x + 16 & \\
+ 11x^2 - 19x + 10 & \\
\hline
13x^2 - 39x + 26 &
\end{array}
$$

Como los términos de este residuo tienen el *m. c. d.* 13, suprimo este *m. c. d.*, y tomo por divisor el cociente $x^2 - 3x + 2$

Tercera division.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 - 11x^2 + 19x - 10 & x^2 - 3x + 2 \\
\cline{2-2}
+ 6x^2 - 4x & 2x - 5 \\
\hline
- 5x^2 + 15x - 10 & \\
- 15x + 10 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Luego $x^2 - 3x + 2$ es el *m. c. d.* de los dos polinomios propuestos.

Artículo 2.°

Teoría de las raices iguales.

69. Hemos visto (61) el método fácil que hay para hallar las raices iguales conmensurables de una ecuacion: pero cuando las raices iguales son inconmensurables, aquel método es inaplicable; y como para la investigacion de las raices inconmensurables de una ecuacion, es necesario, como lo veremos pronto, que estas raices sean desiguales, espondremos el método para *descomponer una ecuacion que tenga raices iguales en otras ecuaciones mas sencillas cuyas raices sean todas desiguales*: tal es el objeto de la teoría de las raices iguales.

Esta teoría se funda en el teorema siguiente.

70. *Si una ecuacion* f (x) = 0 *tiene raices iguales, el máximo comun divisor de su primer miembro* f (x) *y de su derivada es el producto de los factores binomios correspondientes á di raices, teniendo cada binomio en este producto un ferior en una unidad al que tiene en el primer ecuacion.*

Sea la ecuacion

$$f(x) = (x-a)^p (x-b)^q (x-c)^r (x-d)(x-e) = 0:$$

suponemos, para fijar las ideas, que la ecuacion no tiene mas que tres raices repetidas a, b y c, y dos raices simples d y e. Digo que el máximo comun divisor de $f(x)$ y $f'(x)$ es

$$(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}(x-c)^{r-1}.$$

En efecto, la derivada del producto $f(x)$ es (24)

$$\begin{aligned} f'(x) = \quad & p(x-a)^{p-1}(x-b)^q \quad (x-c)^r \quad (x-d)(x-e) \\ & + q(x-a)^p \quad (x-b)^{q-1}(x-c)^r \quad (x-d)(x-e) \\ & + r(x-a)^p \quad (x-b)^q \quad (x-c)^{r-1}(x-d)(x-e) \\ & + \quad (x-a)^p \quad (x-b)^q \quad (x-c)^r \quad (x-e) \\ & + \quad (x-a)^p \quad (x-b)^q \quad (x-c)^r \quad (x-d). \end{aligned}$$

Vemos que los únicos factores primos comunes á todos los términos de $f(x)$ y $f'(x)$ son $(x-a)$, $(x-b)$ y $(x-c)$; y como el menor esponente de $x-a$ en $f(x)$ y $f'(x)$ es $p-1$, el de $x-b$ es $q-1$ y el de $x-c$ es $r-1$, resulta que

$$(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}(x-c)^{r-1}$$

es el producto de las potencias de menor grado de todos los factores primos comunes á $f(x)$ y $(f'x)$; luego (64)

$$(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}(x-c)^{r-1}$$

es el *m. c. d.* de $f(x)$ y $f'(x)$.

Corolario. *Si una ecuacion no tiene raices iguales, su primer miembro y su derivada son cantidades primas entre sí;* pues en tal caso $p = q = r = 1$; y por consiguiente el *m. c. d.* $(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}(x-c)^{r-1}$ de $f(x)$ y $f'(x)$ se reduce á 1.

71. En virtud de este teorema, dada una ecuacion que tenga raices iguales, se puede descomponer en las ecuaciones siguientes: una que contenga todas las raices *simples* ó que entran una sola vez en la ecuacion propuesta, otra que contenga una sola vez todas las raices *duplas* ó que en la propuesta entran dos veces, otra que contenga una sola vez todas las raices *triplas* ó que en la propuesta entran tres veces, etc.

Supongamos que la ecuacion sea

$$\begin{aligned} f(x) = (x-a_1)(x-b_1)\ldots.(x-a_2)^2(x-b_2)^2\ldots \\ (x-a_3)^3(x-b_3)^3\ldots.(x-a_4)^4(x-b_4)^4\ldots = 0: \end{aligned}$$

admitimos que no hay en la ecuacion raices que estén repetidas

mas que cuatro veces: hagamos

$$(x - a_1)(x - b_1) \ldots = X_1,$$
$$(x - a_2)(x - b_2) \ldots = X_2,$$
$$(x - a_3)(x - b_3) \ldots = X_3,$$
$$(x - a_4)(x - b_4) \ldots = X_4,$$

y tendremos

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4 \qquad [1].$$

Nos proponemos, conociendo el polinomio $f(x)$, hallar los polinomios X_1, X_2, X_3, X_4.

Para esto, hallo el máximo comun divisor de $f(x)$ y $f'(x)$, el cual será, segun el teorema (70),

$$X_2 X_3^2 X_4^3 \qquad [2],$$

y por consiguiente este producto será un polinomio conocido.

Hallo el máximo comun divisor de la funcion [2] y de su derivada; este *m. c. d.* será

$$X_2 X_4^2 \qquad [3],$$

que será un polinomio conocido.

Hallo el *m. c. d.* de esta funcion [3] y de su derivada, y tendré

$$X_4 \qquad [4],$$

polinomio conocido.

Queda, pues, hallado el polinomio X_4, producto de las primeras potencias de los factores que entran en $f(x)$ cuatro veces.

Para hallar los polinomios X_1, X_2, X_3, divido cada uno de los polinomios conocidos [1], [2], [3] y [4] por el siguiente, y tendré los cocientes

$$X_1 X_2 X_3 X_4,$$
$$X_2 X_3 X_4,$$
$$X_3 X_4,$$
$$X_4,$$

que tambien serán polinomios conocidos.

Divido cada una de estas espresiones por la siguiente, y los cocientes que resultan, serán

$$X_1,$$
$$X_2,$$
$$X_3;$$

y asi quedan conocidos los polinomios X_1, X_2, X_3.

Igualando á cero estos polinomios X_1, X_2, X_3, X_4, las ecuaciones

$$X_1 = 0,$$
$$X_2 = 0,$$
$$X_3 = 0,$$
$$X_4 = 0$$

serán las ecuaciones pedidas: la primera contiene todas las raices simples de la ecuacion propuesta, la segunda contiene una sola vez todas las raices duplas de la ecuacion propuesta, la tercera contiene una sola vez todas las raices triplas de la ecuacion propuesta, la cuarta contiene una sola vez todas las raices cuádruplas de la ecuacion propuesta.

Si alguna de las funciones X_1, X_2, X_3,... resulta igual á 1, la ecuacion propuesta no tendrá raices del órden indicado por dicha funcion. Asi, si resulta $X_3 = 1$, la ecuacion propuesta no tendrá ninguna raiz tripla.

Al contrario, supongamos que en una ecuacion que tiene raices iguales, sean cuádruplas las raices mas repetidas: si dicha ecuacion no tiene raices de un órden de multiplicidad inferior, como por ejemplo raices triplas, resultará necesariamente $X_3 = 1$; pues el primer miembro de la ecuacion tiene en tal caso la forma $X_4^4 X_2^2 X_1$; y pues, segun el método que se acaba de esplicar, representamos dicho primer miembro por $X_4^4 X_3^3 X_2^2 X_1$, se infiere que resultará $X_3 = 1$.

Si ninguna de las ecuaciones $X_1 = 0$, $X_2 = 0$,... pasa del segundo grado, podremos resolverlas inmediatamente, y hallar todas las raices de la ecuacion propuesta.

Ejemplo. Sea la ecuacion

$$x^7 - 5x^6 + 3x^5 + 18x^4 - 24x^3 - 12x^2 + 28x - 8 = 0.$$

Aunque el método de las raices iguales puede aplicarse á toda ecuacion que tenga ó no raices conmensurables, es preferible principiar por despojar á la ecuacion de todas las raices conmensurables que tenga, iguales ó desiguales. Aplicando, pues, á esta ecuacion el método de las raices conmensurables, hallaremos que la única raiz conmensurable que tiene es 2: partiendo su primer miembro por $x - 2$, resulta la ecuacion

$$x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 12x^3 - 12x + 4 = 0.$$

El *m. d. c.* del primer miembro de esta ecuacion y de su derivada es

$$x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

Observemos ahora que el *m. c. d.* del primer miembro de una ecuacion y de su derivada contiene los factores duplos ele-

vados á la primera potencia, los triplos elevados á la segunda, etc. (70); luego los dos factores $x + \sqrt{2}$ y $x - \sqrt{2}$ del *m. c. d.* entran dos veces en la ecuacion propuesta. De modo que su primer miembro será

$$X_1 X_2^2 = x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 12x^3 - 12x + 4;$$

y por consiguiente $X_2 = x^2 - 2$.

Para hallar ahora X_1, parto la primera espresion por la segunda, y tendré

$$X_1 X_2 = x^4 - 3x^3 - x^2 + 6x - 2,$$
$$X_2 = x^2 - 2.$$

Volviendo á partir, será

$$X_1 = x^2 - 3x + 1.$$

Igualando á cero las funciones X_2 y X_1, tendré las ecuaciones, en que se descompone la propuesta,

$$x^2 - 3x + 1 = 0,$$
$$x^2 - 2 = 0.$$

Como estas ecuaciones son de segundo grado, pueden resolverse inmediatamente.

La primera nos da

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

y la segunda

$$x = \pm \sqrt{2};$$

luego las raices $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ y $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ son raices desiguales de la ecuacion propuesta; las raices $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son raices duplas de la misma ecuacion.

72. El método de las raices iguales que acabamos de esplicar, es sumamente penoso; y por lo mismo se debe evitar dicho método en lo posible.

En primer lugar, este método no deberá aplicarse, sino á ecuaciones que no tengan ninguna raiz conmensurable; y en tal caso puede evitarse dicho método en las ecuaciones d
tes conmensurables que no pasen del quinto grado.

Demostremos, para hacer ver esto, el teor

73. *Si en una ecuacion de coeficientes c*
raiz α repetida un cierto número de vece
repetidas mas ó menos veces, dicha raiz

Por ejemplo, si la ecuacion es

$$(x-a)(x-b)^2(x-c)^2(x-d)^3=0,$$

en que la raiz a entra una vez, entrando las otras raices dos veces y tres veces, la raiz a será conmensurable. Igualmente la raiz d, que entra sola tres veces, es conmensurable.

No se puede decir lo mismo de las raices b y c, porque no es una sola la que entra dos veces.

Para demostrar este teorema, se observará que la ecuacion $X_1=0$ contiene todas las raices que entran una vez en la ecuacion propuesta; que la ecuacion $X_2=0$ contiene una vez las raices que entran dos veces en la ecuacion propuesta; que la ecuacion $X_3=0$ contiene una vez las raices que entran tres veces en la ecuacion propuesta; y asi sucesivamente. Supongamos, para fijar las ideas, que la raiz α entre tres veces en la ecuacion, y las demas entren mas ó menos veces: la ecuacion $X_3=0$, que nos da las raices que entran tres veces en la ecuacion, será de primer grado, puesto que solo tiene una raiz α; y como es evidente que por el cálculo, para hallar X_3, no se introduce ningun coeficiente irracional, se infiere que la ecuacion de primer grado $X_3=0$ tiene sus términos racionales, y por tanto el valor de la incógnita deducido de dicha ecuacion es conmensurable.

Corolarios.

1.° *Una ecuacion de tercer grado de coeficientes conmensurables, que no tiene ninguna raiz conmensurable, no puede tener raices iguales;* pues si tuviese raices iguales, su primer miembro tendria la forma

$$(x-a)^3,$$

ó

$$(x-a)^2(x-b);$$

y en ambos casos, segun el teorema, sus raices serian conmensurables; contra lo supuesto.

2.° *Una ecuacion de cuarto grado de coeficientes conmensurables, que no tiene ninguna raiz conmensurable, no puede tener por raices iguales sino dos raices duplas;* pues su primer miembro, si la ecuacion tiene raices iguales, tendrá una de las formas

$$(x-a)^4,$$
$$(x-a)^3(x-b),$$
$$(x-a)^2(x-b)(x-c),$$
$$(x-a)^2(x-b)^2:$$

en los tres primeros casos su raiz ó raices serian conmensurables, segun el teorema; luego, cuando una ecuacion de cuarto grado de coeficientes conmensurables, que no tiene ninguna raiz con-

mensurable, tenga raices iguales, su primer miembro tendrá necesariamente la forma

$$(x-a)^2(x-b)^2;$$

es decir, que el primer miembro será un cuadrado perfecto, ó que la ecuacion tendrá dos raices duplas.

Dada, pues, una ecuacion de cuarto grado, cuyas raices sean inconmensurables ó imaginarias, se estraerá la raiz cuadrada de su primer miembro; si no la tiene exacta, dicha ecuacion no tendrá raices iguales; si la tiene exacta, su raiz cuadrada igualada á cero nos dará dos raices, cada una de las cuales entrará dos veces en la ecuacion.

3.° *Una ecuacion de quinto grado de coeficientes conmensurables, que no tiene ninguna raiz conmensurable, no puede tener raices iguales.*

En efecto, admitamos que la ecuacion de quinto grado tenga raices iguales; su primer miembro tendrá una de estas formas:

$$(x-a)^5,$$
$$(x-a)^4(x-b),$$
$$(x-a)^3(x-b)^2,$$
$$(x-a)^3(x-b)(x-c),$$
$$(x-a)^2(x-b)^2(x-c),$$
$$(x-a)^2(x-b)(x-c)(x-d):$$

en todos estos casos existiria, segun el teorema, por lo menos una raiz conmensurable; contra lo supuesto.

Artículo 2.°

Regla de los signos de Descartes.

---

74. Siempre que dos términos consecutivos de un polinomio tengan diferente signo, se dice que hay una *variacion*; y si dichos dos términos tienen un mismo signo, se dice que hay una *permanencia*.

75. *En una ecuacion completa ó incompleta* f(x) = 0 *el número de raices positivas* (a) *no puede ser mayor que el número de variaciones.*

Sea un polinomio completo ó incompleto

$$A_0x^m \ldots\ldots - A_nx^{m-n} \ldots\ldots + A_px^{m-p} \ldots\ldots - A_qx^{m-q}$$

ordenado con respecto á x, siendo todos los esp
teros y positivos; el último esponente m –

(a) Cuando digamos que una raiz es positiva es real positiva ó real negativa.

Los puntos representan un número indefinido de términos del mismo signo que el que está escrito á su izquierda; es decir, que desde el primer término $A_o x^m$ hasta el término $-A_n x^{m-n}$ todos los términos tienen el signo $+$, desde el término $-A_n x^{m-n}$ hasta el $+A_p x^{m-p}$ todos tienen el signo $-$, etc. Para fijar las ideas, tomamos un polinomio que tiene tres variaciones.

Representamos cada coeficiente por la letra A con un índice igual al sustraendo del esponente de x, ó lo que es lo mismo, con un índice igual al número de términos precedentes; de modo que el término inmediato anterior al $-A_n x^{m-n}$ es $+A_{n-1} x^{m-(n-1)}$, el término inmediato anterior al $+A_p x^{m-p}$ es $-A_{p-1} x^{m-(p-1)}$, etc.

Multipliquemos el polinomio propuesto por $x-a$, siendo a un número positivo:

$$\begin{array}{l} A_o x^m \ldots - A_n x^{m-n} \ldots + A_p x^{m-p} \ldots - A_q x^{m-q} \ldots - A_r x^{m-r} \\ x - a \\ \hline A_o x^{m+1} \ldots - A_n \left| \begin{array}{l} x^{m-n+1} \ldots + A_p \\ \ldots - aA_{n-1} \end{array} \right| \begin{array}{l} x^{m-n+1} \ldots - A_q \\ \ldots + aA_{p-1} \end{array} \left| \begin{array}{l} x^{m-q+1} \ldots - A_r \\ \ldots - aA_{q-1} \end{array} \right| \begin{array}{l} x^{m-r+1} \\ \ldots + aA_{r-1} \end{array} \left| \begin{array}{l} \\ + aA_r x^{m-r} \end{array} \right. \end{array}$$

Observemos en primer lugar que los puntos de la primera línea de este producto son términos del mismo signo que el del término inmediato de la izquierda, y los puntos de la segunda línea son términos del mismo signo que el del término inmediato de la derecha.

Ahora, en el multiplicando hay una sola variacion desde el término $A_o x^m$ hasta el término $-A_n x^{m-n}$, otra desde este hasta el término $+A_p x^{m-p}$, y otra desde este hasta el $-A_q x^{m-q}$ ó hasta el último $-A_r x^{m-r}$.

En el producto tenemos por lo menos una variacion desdé el primer término $A_o x^{m+1}$ hasta $\left.\begin{array}{l} -A_n \\ -aA_{n-1} \end{array}\right| x^{m-n+1}$ inclusive, otra por lo menos desde este hasta el término $\left.\begin{array}{l} +A_p \\ +aA_{p-1} \end{array}\right| x^{m-p+1}$, y otra por lo menos desde este hasta el término $\left.\begin{array}{l} -A_q \\ -aA_{q-1} \end{array}\right| x^{m-q+1}$.

Tenemos, pues, en el producto tantas variaciones, por lo me-

nos, hasta el término $\left.\begin{array}{l} -A_q \\ \\ -aA_{q-1} \end{array}\right| x^{m-q+1}$, como variaciones hay en el multiplicando. Pero en el producto desde el término $\left.\begin{array}{l} -A_q \\ \\ -aA_{q-1} \end{array}\right| x^{m-q+1}$ hasta el término $+aA_r x^{m-r}$ hay por lo menos una variacion; luego queda demostrado que *si un polinomio $f(x)$ completo ó incompleto se multiplica por un binomio* x — a, *siendo* a *un número positivo, el producto tiene por lo menos una variacion mas que dicho polinomio.*

Hemos supuesto que el polinomio propuesto no tiene mas que tres variaciones; pero es claro que la misma demostracion comprende á los polinomios que tengan cinco, siete, etc. variaciones; y tambien se demostrará del mismo modo el teorema, aun cuando el número de variaciones del polinomio propuesto sea par.

Habiendo demostrado este lema, se demostrará fácilmente el teorema propuesto. Dividamos el primer miembro de la ecuacion $f(x)=0$ por el producto $(x-a)(x-b)(x-c)$..... de los factores binomios correspondientes á las raices reales positivas, y resultará un cociente $f_1(x)$, que igualado á cero, contendrá las raices reales negativas y las imaginarias de la ecuacion propuesta.

Tendremos la igualdad

$$f(x)=f_1(x)(x-a)(x-b)(x-c).....$$

El producto $f_1(x)(x-a)$ tendrá, segun el lema demostrado, por lo menos una variacion, aun cuando $f_1(x)$ no tenga ninguna, el producto $f_1(x)(x-a)(x-b)$ tendrá por lo menos dos variaciones, el producto $f_1(x)(x-a)(x-b)(x-c)$ tendrá por lo menos tres variaciones, etc.; luego el polinomio $f(x)$ tendrá por lo menos tantas variaciones como raices positivas tenga la ecuacion $f(x)=0$; ó lo que es igual, el número de raices reales positivas de la ecuacion $f(x)=0$ no puede ser mayor que el número de variaciones de su primer miembro; que es el enunciado del teorema.

La regla de los signos tiene tres partes: la primera y principal es el teorema que acabamos de demostrar; y la segunda es el siguiente

Corolario. *El número de raices reales negativas de una ecuacion* f(x)=0 *no puede ser mayor que el número de variaciones de la ecuacion transformada* f(—x)=0.

En efecto, las dos ecuaciones $f(x)=0$ y $f(-x)=0$ tienen sus raices respectivamente iguales y de signo contrario: el número de raices reales positivas de la ecuacion $f(-x)=0$ no puede ser

mayor que el número de variaciones, segun el teorema; luego el número de raices reales negativas de la ecuacion propuesta $f(x)=0$ no puede ser mayor que el número de variaciones de la transformada $f(-x)=0$.

76. Antes de entrar en la tercera parte de la regla de los signos, conviene demostrar el teorema siguiente.

El número de variaciones de una ecuacion y de su transformada en $-x$ *no es mayor que el grado de la ecuacion.*

Sean Px^p y Qx^{p-q} dos términos consecutivos cualesquiera de la ecuacion completa ó incompleta.

Tenemos que considerar dos casos: 1.° q número par, 2.° q número impar.

1.° Si q es par, los dos esponentes p y $p-q$ serán ambos pares si p es par, y ambos impares si p es impar. Si los dos esponentes son pares, estos términos tendrán en la transformada en $-x$ los mismos signos que en la ecuacion propuesta; luego, si en esta presentan una variacion, en la transformada presentarán otra; y por tanto darán dos variaciones en las dos ecuaciones. Si los dos esponentes son impares, dichos términos tendrán en la transformada contrarios signos de los que tienen en la ecuacion propuesta; luego, si forman una variacion en la propuesta, formarán tambien una variacion en la transformada, y por tanto en ambas ecuaciones darán dos variaciones. Si los dos términos no forman variacion en la ecuacion propuesta, tampoco la formarán en la transformada. Tenemos, pues, que si q es par, los dos términos consecutivos Px^p y Qx^{p-q} darán, á lo mas, en las dos ecuaciones dos variaciones, número que no es mayor que q, puesto que q es par.

2.° Si q es impar, los esponentes p y $p-q$ serán par é impar, ó impar y par; luego uno de los términos Px^p y Qx^{p-q} (aquel que tenga esponente par) conservará su signo en la transformada, y el otro mudará de signo; luego, si en la propuesta daban una variacion dichos dos términos, en la transformada darán una permanencia; y si en la propuesta daban una permanencia, en la transformada darán una variacion. Tenemos, pues, que si q es impar, á lo mas darán los dos términos consecutivos Px^p y Qx^{p-q} una variacion en las dos ecuaciones, cantidad que no es mayor que q.

En conclusion, el número de variaciones que dan dos términos consecutivos de las dos ecuaciones $f(x)=0$ y $f(-x)=0$ no es mayor que la diferencia de los esponentes de dichos dos términos.

Esto supuesto, representemos la ecuacion completa ó incom-

pleta por

$$Ax^m + Bx^{m-b} + Cx^{m-c} + Dx^{m-d} + Ex^{m-e} = 0:$$

suponemos, para fijar las ideas, que la ecuacion propuesta tiene cinco términos.

Sean v, v', v'', v''' las variaciones que producen en las dos ecuaciones, propuesta y transformada en $-x$, los términos 1.° y 2.°, 2.° y 3.°, 3.° y 4.°, 4.° y 5.°: tendremos

$$v \not> m - (m - b) \text{ ó } v \not> b \text{ (a)},$$
$$v' \not> c - b,$$
$$v'' \not> d - c,$$
$$v''' \not> e - d;$$

luego

$$v + v' + v'' + v''' \not> b + c - b + d - c + e - d,$$

ó

$$v + v' + v'' + v''' \not> e,$$

y como $e \not> m$, se infiere que

$$v + v' + v'' + v''' \not> m,$$

conforme á la conclusion del teorema.

77. *Si el número de variaciones* v y v' *de una ecuacion y de su transformada en* — x *es menor que el grado* m, *la ecuacion tendrá por lo menos* m — (v + v') *raices imaginarias.*

En efecto, el número total de raices reales no es mayor que $v + v'$; y por tanto la ecuacion tendrá por lo menos $m - (v + v')$ raices imaginarias.

Por medio de esta proposicion se determinará, á veces, el número de raices reales de la ecuacion.

Asi la ecuacion

$$x^5 - 3x^2 + x + 2 = 0$$

tiene dos variaciones. La transformada en $-x$ es

$$-x^5 - 3x^2 - x + 2 = 0$$

ó

$$x^5 + 3x^2 + x - 2 = 0,$$

que no tiene mas que una variacion; luego la ecuacion propuesta tiene á lo mas tres raices reales; luego por lo menos tiene dos raices imaginarias.

Sea la ecuacion

$$x^4 + x - 1 = 0.$$

Esta ecuacion no tiene mas que una variacion, la transformada en $-x$, que es

$$x^4 - x - 1 = 0,$$

(a) El signo $\not>$ significa *no es mayor que.*

tampoco tiene mas que una variacion; luego la ecuacion propuesta tiene á lo mas dos raices reales; luego tiene por lo menos dos raices imaginarias.

Ahora bien, sabemos (52) que la ecuacion propuesta tiene por lo menos dos raices reales, una positiva y otra negativa; luego esta ecuacion tiene dos raices reales y dos imaginarias.

Sea la ecuacion binomia

$$x^m - 1 = 0,$$

en que m es par: esta ecuacion da una variacion, su transformada en $-x$, que es

$$x^m - 1 = 0,$$

da otra variacion; luego el número de raices imaginarias de esta ecuacion es por lo menos $m - 2$. Mas sabemos que la ecuacion

$$x^m - 1 = 0,$$

en que m es par, tiene por lo menos dos raices reales; luego esta ecuacion tiene dos raices reales y $m - 2$ imaginarias.

Si m fuese impar, la transformada en $-x$ seria

$$x^m + 1 = 0,$$

que no da ninguna variacion; luego la ecuacion

$$x^m - 1 = 0,$$

en que m es impar, tiene una raiz real y $m - 1$ imaginarias.

Sea la ecuacion

$$x^m + 1 = 0,$$

en que m es par: su transformada en $-x$ es

$$x^m + 1 = 0.$$

Como no resulta ninguna variacion en las dos ecuaciones, las m raices de la ecuacion son imaginarias.

Si m fuese impar, la transformada en $-x$ seria

$$x^m - 1 = 0.$$

La primera ecuacion no da ninguna variacion, y por tanto la ecuacion no tiene ninguna raiz positiva. La transformada da una variacion, y por tanto el número de raices imaginarias es por lo menos $m - 1$. Como la ecuacion propuesta tiene por lo menos una raiz negativa (51), se infiere que las otras $m - 1$ son imaginarias (*a*).

TERCERA PARTE DE LA REGLA DE LOS SIGNOS.

78. *Si una ecuacion* COMPLETA *ó* INCOMPLETA *tiene todas sus raices reales, el número de raices positivas es igual al número de*

(*a*) Todo lo que acabamos de hallar acerca de las raices de las ecuaciones binomias, puede obtenerse fácilmente, sin necesidad de la regla de los signos.

variaciones, y el número de raices negativas es igual al número de variaciones de la transformada en — x.

En efecto, sea P el número de sus raices positivas, N el de sus raices negativas, m el grado de la ecuacion, v el número de variaciones de la ecuacion propuesta, v' el de su transformada en $-x$: tendremos

$$P + N = m.$$

Sabemos ademas que $v + v'$ no es mayor que m (78): tampoco $v + v'$ es en el caso actual menor que m, pues si asi fuera, la ecuacion tendria raices imaginarias (77), contra lo supuesto; luego

$$v + v' = m.$$

Por consiguiente

$$P + N = v + v'.$$

Sabemos que P no es mayor que v [75]: tampoco en el caso actual puede ser P menor que v; pues si asi fuese, tendríamos como consecuencia $N > v'$, lo que no puede ser (75, *Corol.*): luego $P = v$, y por consiguiente $N = v'$, conforme al teorema.

79. Las partes 2.ª y 3.ª de la regla de los signos de Déscartes pueden espresarse del modo siguiente:

SEGUNDA PARTE DE LA REGLA DE LOS SIGNOS.

En toda ecuacion COMPLETA *el número de raices reales negativas no es mayor que el número de permanencias.*

En efecto, dada una ecuacion completa $f(x) = 0$, para hallar su transformada en $-x$, no hay mas que mudar los signos á los términos que ocupan lugar par (38); luego si dos signos consecutivos cualesquiera forman en la ecuacion propuesta una variacion ó una permanencia, formarán en la transformada respectivamente una permanencia ó una variacion; luego las variaciones de la ecuacion se mudan en permanencias, y las permanencias se mudan en variaciones; es decir que el número de permanencias de la ecuacion completa $f(x) = 0$ y el de variaciones de la transformada $f(-x) = 0$ es el mismo.

Ahora bien, las ecuaciones propuesta y transformada tienen sus raices respectivamente iguales y de signo contrario; y como el número de raices positivas de la ecuacion transformada no puede ser mayor que el número de sus variaciones, se infiere que el número de raies reales negativas de la ecuacion propuesta no puede ser mayor que el número de sus permanencias.

TERCERA PARTE DE LA REGLA DE LOS SIGNOS.

80. *En toda ecuacion* COMPLETA, *cuyas raices sean* [illegible] *el número de raices positivas es igual al número de* [illegible]

el número de raices negativas es igual al número de permanencias (a).

En efecto, si una ecuacion del grado m es completa, la suma del número de variaciones y del número de permanencias es igual al grado m de la ecuacion; pues el signo del segundo término da una variacion ó una permanencia, el del tercer término da igualmente una variacion ó una permanencia, etc.; es decir, que la suma de variaciones y permanencias es igual al número de signos contados desde el segundo. Mas, siendo la ecuacion completa, el número de sus términos es $m + 1$; luego la suma de las variaciones y permanencias es m.

Esto supuesto, sea P el número de sus raices positivas, N el de sus negativas, v el número de variaciones, p el de permanencias: tendremos

$$P + N = m,$$
$$v + p = m;$$

luego $$P + N = v + p.$$

Si fuese $P < v$, resultaria $N > p$; lo que es imposible (79). No pudiendo ser $P < v$, como tampoco puede ser $P > v$ (75), se infiere que $P = v$, y por consiguiente $N = p$.

Nota. Hasta hace pocos años se enunciaba la regla de los signos de Descartes asi:

En toda ecuacion el número de raices reales positivas no es mayor que el número de variaciones, el número de raices reales negativas no es mayor que el número de sus permanencias; y si la ecuacion tiene todas sus raices reales, el número de raices positivas es igual al número de variaciones, y el número de sus raices negativas es igual al número de sus permanencias; pero las partes segunda y tercera de este enunciado son inexactas, si no se añade que la ecuacion sea *completa*, condicion que no exige la primera parte.

La ecuacion $x^3 - 7x + 6 = 0$, cuyas raices son 1, 2 y -3, prueba la inexactitud de dicho enunciado.

Esta ecuacion no tiene ninguna permanencia, y sin embargo tiene la raiz negativa -3: la misma ecuacion tiene dos raices positivas 1 y 2, y la negativa -3, aunque segun la tercera parte del enunciado no podria tener mas que dos raices reales.

(a) Este teorema es un corolario del (78), pues el número de permanencias de una ecuacion completa es igual al de variaciones de la transformada.

Artículo 4.°

Teorema de Sturm.

81. Lema 1.° *Si* a *es raiz de una ecuacion* f(x) = 0 *que no tiene raices iguales,* f(a — h) *y* f'(a — h) *tienen diferente signo, y* f(a + h) *y* f'(a + h) *tienen el mismo signo; siendo* h *una cantidad positiva tan pequeña como se quiera.*

En efecto, no teniendo la ecuacion $f(x) = 0$ raices iguales, $f'(a)$ no puede ser cero, pues si lo fuese, seria $f'(x)$ divisible por $x - a$, y como por suposicion tambien $f(x)$ es divisible por $x - a$, $f(x)$ y $f'(x)$ tendrian un divisor comun, funcion de x; es decir que la ecuacion propuesta tendria raices iguales, contra la hipótesi.

Esto supuesto: 1.° el teorema Taylor nos da, teniendo en cuenta que $f(a) = 0$,

$$f(a-h) = h\left(-f'(a) + \frac{h}{2}f''(a) - \frac{h^2}{2.3}f'''(a) + \ldots\ldots\right):$$

siendo la cantidad positiva h suficientemente pequeña, la cantidad interior al paréntesis, tendrá el signo de su primer término; luego el producto, ó su igual $f(a - h)$, tendrá signo contrario de $f'(a)$.

Tambien, siendo, como lo es, $f'(x)$ una funcion de x cuyas derivadas son $f''(x)$, $f'''(x)$, etc., el teorema de Taylor nos da

$$f'(a-h) = f'a - \frac{h}{2}f''(a) + \frac{h^2}{2.3}f'''(a) - \ldots;$$

luego, siendo h suficientemente pequeña, $f'(a-h)$ tiene el mismo signo que $f'(a)$.

Luego queda demostrado que $f(a-h)$ y $f'(a-h)$ tienen signo contrario.

2° Desarrollando $f(a + h)$ y $f'(a + h)$ se verá del mismo modo, que estas cantidades tienen el mismo signo que $f'(a)$, siendo h suficientemente pequeña, y que por tanto tienen las dos el mismo signo.

Lema 2.° *Si* f(x) = 0 *es una ecuacion que no tiene raices iguales, y hacemos con* f(x) *y con su derivada* f'(x) *las mismas operaciones que para hallar su* m. c. d., *con la difere[illegible] mudar el signo de cada residuo antes de tomarle por [illegible] division siguiente, se llegará á un residuo indep[illegible] diferente de* 0.

Indiquemos estas divisiones, llamando á los residuos sucesivos $-X_1, -X_2, -X_3, \ldots$

$$f(x) \left| \frac{f'(x)}{C_1} \right| \frac{X_1}{C_2} \left| \frac{X_2}{C_3} \right| \frac{X_3}{C_4} \left| \frac{X_4}{C_5} \right.$$

$$-X_1 \quad -X_2 \quad -X_3 \quad -X_4 \quad -X_5$$

Observemos que el grado de cada residuo va disminuyendo sucesivamente por lo menos en una unidad; luego al cabo de un cierto número de divisiones, llegaremos á un residuo (que para fijar las ideas, supondremos sea $-X_5$) independiente de x, el cual no podrá ser 0: pues si $-X_5$ fuese 0, la funcion de x X_4 seria el *m. c. d.* de $f(x)$ y $f'(x)$. Porque al hallar el *m. c. d.* de dos polinomios, podemos, si queremos, cambiar el signo de cualquiera de los polinomios que intervienen en esta operacion; pues claro es que un divisor de dos cantidades es el mismo, aunque cualquiera de ellas cambie de signo, ó aunque las dos cambien de signo. Luego si la funcion X_4 de x fuera divisor de $f(x)$ y $f'(x)$, sacaríamos en consecuencia que la ecuacion propuesta $f(x) = 0$ tendria raices iguales, contra la hipótesi.

Queda pues demostrado que el último residuo $-X_5$ es un número.

Esto supuesto, el teorema de Sturm es el siguiente:

Sean α y β dos números cualesquiera, que no sean raices de una ecuacion $f(x)=0$, *cuyas raices sean todas desiguales, y sea α el menor de los dos: sustitúyanse estos números en vez de* x *en las funciones*

$$f(x),\ f'(x),\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5 \qquad [s].$$

El número de raices reales de la ecuacion $f(x)=0$, *comprendidas entre α y β, es igual al número de variaciones que dan estas funciones sustituyendo el menor número α, menos el número de variaciones que dan las mismas sustituyendo el mayor β.*

Para demostrar este teorema, principiaremos por observar que, mientras la variable x, creciendo por grados insensibles desde α no llegue á tener un valor que anule á una ó á varias de las funciones [s], los signos de estas no sufrirán alteracion alguna; es decir, tendrán los mismos signos que tienen sustituyendo α en vez de x; pues, para que alguna de dichas funciones cambie de signo, es menester que pase por cero (49).

Luego, para que el número de variaciones de las funciones [s] sufra alteracion, es menester que x llegue á tener un valor que anule una ó mas de dichas funciones.

Primer caso. Supongamos que x, creciendo desde α haya llegado á un valor a que anule una ó varias de las funciones intermedias $f'(x)$, X_1, X_2, X_3, X_4, sin anular á $f(x)$ (como X_5 es un número, no puede anularse).

Sea por ejemplo X_2 una de las funciones intermedias que se anula por el valor a dado á x. De las divisiones del lema 2.° resultan las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x).C_1 - X_1, \\ f'(x) &= X_1.C_2 - X_2, \\ X_1 &= X_2.C_3 - X_3, \\ X_2 &= X_3.C_4 - X_4, \\ X_3 &= X_4.C_5 - X_5. \end{aligned}$$

La igualdad tercera demuestra que, si se anula X_2 por el valor a dado á la variable x, la funcion anterior X_1 y la siguiente X_3 no podrán anularse por dicho valor a de la variable: pues si alguna de estas dos funciones se anulase, la otra se anularia tambien, y segun la igualdad segunda se anularia $f'(x)$, y segun la primera se anularia $f(x)$; luego $f(x)$ y $f'(x)$ tendrian un divisor comun funcion de x, y por tanto la ecuacion propuesta $f(x) = 0$ tendria raices iguales, contra lo supuesto.

No anulándose ninguna de las funciones X_1 y X_3 por dicho valor a de x; sustituyendo este valor en vez de x en la igualdad tercera, se ve que los valores que entonces tienen estas dos funciones, son de signo contrario.

Sean $a - h$ y $a + h$ dos valores que sustituimos en vez de x en las tres funciones X_1, X_2, X_3, siendo la cantidad positiva h bastante pequeña para que ninguna de las dos funciones X_1 y X_3 se anule por estos valores dados á x: dichas tres funciones formarán desde $x = a - h$ hasta $x = a + h$ una sola variacion; pues mudando de signo en este intervalo X_2, y conservándolo X_1 y X_3, los signos de dichas tres funciones, cuando $x = a - h$, formarán una de estas cuatro combinaciones:

$$x = a - h \ldots \left\{ \begin{array}{l} + + -, \\ + - -, \\ - + +, \\ - - +; \end{array} \right.$$

y cuando $x = a + h$, formarán las combinaciones respectivas.....

$$\left\{ \begin{array}{l} + - -, \\ + + -, \\ - - +, \\ - + +; \end{array} \right.$$

donde vemos que siempre resulta una variacion.

Cuando $x = a$, resultan las combinaciones de signos:

$$+ 0 -, \; - 0 +,$$

es decir, que cualquiera que sea el signo que se le suponga á 0.

resulta una variacion; y tambien resulta una variacion, si se prescinde del resultado 0.

Tenemos, pues, que el número de variaciones de las funciones [s] es el mismo inmediatamente antes é inmediatamente despues de la anulacion de una de dichas funciones.

Si x, continuando en su crecimiento, llega á tener un nuevo valor que anule á una de las funciones intermedias, sin anular á $f(x)$, el razonamiento anterior prueba que el número de variaciones será siempre el mismo.

Segundo caso. Supongamos que creciendo x por grados insensibles desde α, haya llegado á un valor a, que anule á $f(x)$, ó lo que es igual, que sea raiz de la ecuacion $f(x) = 0$.

Segun el lema primero $f(a - h)$ y $f'(a - h)$ forman una variacion, y $f(a + h)$ y $f'(a + h)$ forman una permanencia, ó en otros términos $f(x)$ y $f'(x)$ forman una variacion cuando $x = a - h$, y forman una permanencia cuando $x = a + h$, siendo $f(x)$ la que muda de signo.

Luego las funciones [s] dan una variacion menos para $x = a + h$ que para $x = \alpha$, aun cuando el valor a de x anule alguna de las funciones intermedias X_1, X_2,..... (a); pues hemos demostrado en el *primer caso* que la anulacion de una ó mas funciones intermedias no altera al número de variaciones.

Continuando x en su crecimiento, podrán anularse nuevamente alguna ó algunas de las funciones intermedias [s], antes de volver á anularse $f(x)$; pero queda demostrado que esto no altera al número de variaciones que existen en las funciones [s] cuando $x = a + h$. Mas se ha de observar con cuidado que, antes de llegar x á tener otro valor b que anule á $f(x)$, se dispondrán los signos de $f(x)$ y $f'(x)$ de modo que formen una variacion, segun se ha demostrado en el lema 1.°, lo que exige que $f'(x)$ mude de signo; y sin que por esto se altere el número de las variaciones que existen en las funciones [s], cuando x tiene el valor $a + h$, por ser $f'(x)$ una funcion intermedia; aunque sí se alterará el órden en que estas variaciones están colocadas. Dando, pues, á x el valor $b + h$, la variacion que forman las dos funciones $f(x)$ y $f'(x)$ se mudará en permanencia, y por tanto en las funciones [s] existirán dos variaciones menos que cuando $x = \alpha$.

Del mismo modo se demuestra que, creciendo x, y volviendo á pasar por otro valor c raiz de la ecuacion $f(x) = 0$, se perderá otra variacion; y asi sucesivamente.

(a) Ya hemos dicho (lema 1.°) que $f'(x)$ no es cero por el valor a, raiz de la ecuacion $f(x) = 0$.

Queda pues demostrado que la sustitucion del número β da tantas variaciones de menos que la sustitucion de α, cuantas son las raices reales comprendidas entre α y β.

Observaciones. 1.ª En las divisiones que hay que efectuar para hallar las funciones $X_1, X_2, \ldots\ldots$ se evitarán los coeficientes fraccionarios, multiplicando ó dividiendo los dividendos y divisores por números positivos convenientes. De este modo las funciones $f(x)$, $f'(x)$, X_1, X_2, $X_3, \ldots\ldots$ quedarán multiplicadas ó partidas por números positivos, lo que no alterará los signos que tendrán dichas funciones, cuando se den á x valores particulares cualesquiera.

2.ª Si alguna de las funciones intermedias se anula por el valor α de x ó por el valor β, se ha visto que dicha funcion está comprendida entre otras dos que no se anulan y tienen entonces signos contrarios, y que las tres funciones forman una sola variacion, cualquiera que sea el signo que se suponga al valor 0 de la funcion intermedia. En este caso, pues, se contarán las variaciones que forman las funciones que no se anulan.

82. Es fácil hallar el número de raices reales positivas de una ecuacion por medio del teorema de Sturm.

La cuestion se reduce á hallar el número de raices comprendidas entre 0 y el límite superior L de las raices positivas de la ecuacion. Para esto, sustituiré en vez de x estos dos valores en las funciones de Sturm, y el número de variaciones de menos que dé la sustitucion de L que el que da la sustitucion de 0, será el número de raices positivas de la ecuacion.

Obsérvese que haciendo $x = 0$ en todas las funciones de Sturm, los resultados son los últimos términos, y haciendo $x = L$, límite superior de las raices positivas de las ecuaciones que resultan igualando á cero todas las funciones de Sturm, los resultados tienen los mismos signos que los primeros términos de dichas funciones (48). Luego *el número de raices positivas de una ecuacion es igual al número de variaciones de los últimos términos de las funciones de Sturm, menos el número de variaciones de los primeros términos de dichas funciones.*

Para hallar el número de raices reales negativas de una ecuacion, se sustituirán en vez de x en las funciones de Sturm el límite superior de las raices negativas de la ecuacion, y 0, y el número de variaciones de menos que dé la segunda sustitucion, será el número de raices negativas de la ecuacion.

Observemos que si $-L$ es el límite superior de las raices negativas de las ecuaciones que resultan igualando á cero todas las funciones de Sturm, y $F(x) = 0$ es una cualquiera de estas ecuaciones, sustituyendo en el polinomio $F(x)$ en vez de x $-L$,

el resultado es $F(-L)$. Mas L es el límite superior de las raices positivas de la ecuacion $F(-x)=0$, puesto que esta ecuacion es la transformada en $-x$ de la ecuacion $F(x)=0$, y $F(-L)$ es el resultado de la sustitucion de L en lugar de x en el polinomio $F(-x)$, resultado cuyo signo es (48) el del primer término de $F(-x)$: luego los resultados de la sustitucion de $-L$ en lugar de x en las funciones de Sturm tienen los mismos signos que los primeros términos de estas funciones, mudando en ellos x en $-x$.

Como los resultados de la sustitucion de 0 son los últimos términos de las funciones, se infiere que *el número de raices negativas de una ecuacion es igual al número de variaciones de los primeros términos de las funciones, mudando en ellos* x *en* $-$ x, *menos el número de variaciones de los últimos términos.*

Ejemplo. Hallar el número de raices reales positivas y negativas de la ecuacion $x^4-5x^3-x^2+15x-6=0$.

Tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4-5x^3-x^2+15x-6, \\ f'(x) &= 4x^3-15x^2-2x+15, \\ X_1 &= 83x^2-170x+21, \\ X_2 &= 75x-72, \\ X_3 &= 351339. \end{aligned}$$

El número de variaciones de los últimos términos de estas funciones es 3, y el de sus primeros términos es 0; luego el número de raices positivas de esta ecuacion es 3.

Para hallar el número de raices negativas, mudo en los primeros términos de las funciones x en $-x$, y tendré la sucesion siguiente de los signos de los nuevos primeros términos

$$+-+-+,$$

que dan cuatro variaciones. El número de variaciones de los últimos términos de las funciones es 3; luego la ecuacion tiene una sola raiz real negativa.

Vemos que las cuatro raices de la ecuacion propuesta son reales, y que se confirma tambien la tercera parte de la regla de los signos.

Artículo 3.°

Investigacion de las raices inconmensurables (a).

§ I. Nociones preliminares.

83. Dividiendo el primer miembro de una ecuacion por el producto de los factores binomios correspondientes á las raices

(a) La teoría de las raices iguales, la regla de los signos de Descartes y el teorema de Sturm son teorías preparatorias para entrar en la investigacion de *as raices* inconmensurables.

conmensurables, el cociente igualado á cero solo contendrá las raices inconmensurables é imaginarias de la ecuacion propuesta. Si la ecuacion que resulta igualando el cociente á cero, es de 4.° grado, se estraerá la raiz cuadrada del primer miembro, para ver si tiene raices iguales (73, *Corol.* 2.°). Si dicha ecuacion es de 3.° ó 5.° grado no tendrá raices iguales (73, *Corols.* 1.° y 3.°); pero si pasa del 5.° grado, se verá, con el mismo objeto, si su primer miembro y su derivada tienen un divisor comun dependiente de x; y en caso que asi suceda, se descompondrá la ecuacion, segun la teoría de las raices iguales, en otras mas simples que no contengan ninguna raiz repetida. Por consiguiente las ecuaciones que aun tenemos que resolver, solo contendrán raices desiguales inconmensurables, ó raices desiguales imaginarias, ó unas y otras.

84. La investigacion de las raices inconmensurables, que forma nuestro actual objeto, tiene dos partes distintas: la primera, llamada *separacion de las raices*, consiste en hallar para cada raiz inconmensurable dos números, entre los cuales esté ella sola comprendida; y la segunda, llamada *aproximacion de las raices*, consiste en hallar el valor de cada raiz con la aproximacion que se quiera.

85. Sabemos (37) que, mudando x en $-x$ en la ecuacion, las raices positivas de la transformada son respectivamente iguales y de signo contrario á las raices negativas de la propuesta; por lo tanto, para hallar las raices negativas de una ecuacion, efectuaremos esta transformacion, y hallando las raices positivas de la transformada, y tomándolas negativamente, tendremos las raices negativas de la ecuacion propuesta.

No tenemos, pues, que ocuparnos mas que de la investigacion de las raices positivas inconmensurables.

§ II. Separacion de las raices inconmensurables.

86. Hállese el límite superior de las raices positivas de la ecuacion, y sustitúyanse en la ecuacion en lugar de x los términos de la progresion aritmética

$$0, 1, 2, 3, .., L,$$

y si los resultados presentan tantos cambios de signo como variaciones tiene la ecuacion, entre cada dos números consecutivos, que han dado resultados de signo contrario, existirá una sola raiz.

En efecto, sabemos que entre dos números que dan resultados de signo contrario, existe un número impar de raices (50, *Recip.*); luego por lo menos existirá una raiz entre dichos dos números: mas, segun nuestra suposicion, entre dos números

24.433

enteros consecutivos, que hayan dado resultados de signo contrario, no podrán existir tres, cinco, etc. raices; porque, si asi fuera, el número de raices reales positivas seria mayor que el número de variaciones, lo que es contrario á la regla de los signos de Descartes. Luego en este caso la separacion de las raices reales positivas está efectuada.

Ejemplos. 1.° Sea la ecuacion $x^4 - 5x^3 - x^2 + 15x - 6 = 0$.

Esta ecuacion no tiene ninguna raiz conmensurable. Estrayendo la raiz cuadrada de su primer miembro, no la tiene exacta, y por tanto tampoco tiene raices iguales (73, *Corol.* 2.°).

El límite superior de las raices positivas es 6.

Haciendo $x = 0$, el resultado tiene el signo $-$,

$x = 1$, $+$,

$x = 2$, $-$,

$x = 3$, $-$,

$x = 4$, $-$,

$x = 5$, $+$.

Resultan tres cambios de signo; luego la ecuacion tiene por lo menos tres raices positivas: y no puede tener mayor número de raices positivas, segun la regla de los signos de Descartes, porque su primer miembro no tiene mas que tres variaciones. Luego entre 0 y 1 hay una sola raiz, una sola entre 1 y 2, y una sola entre 4 y 5. La cuarta raiz es negativa (56 ú 80), y se halla comprendida entre -1 y -2.

2.° Sea la ecuacion $x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$ que no tiene ninguna raiz conmensurable ni raices iguales. El límite superior de las raices positivas es 5.

Haciendo $x = 0$, el resultado tiene el signo $+$,

$x = 1$, $+$,

$x = 2$, $+$,

$x = 3$, $-$,

$x = 4$, $+$,

$x = 5$, $+$.

Vemos que resultan dos cambios de signo, el uno en los resultados de las sustituciones de los números 2 y 3, y el otro en los resultados de las sustituciones de los números 3 y 4. Como la ecuacion no tiene mas que dos variaciones, la separacion de las raices reales positivas está hecha; una raiz se halla entre 2 y 3, y la otra entre 3 y 4.

Las otras dos raices son imaginarias; pues la transformada en $-x$ de la ecuacion propuesta es

$$x^4 + 4x^3 + 3x + 23 = 0,$$

la cual, tanto por la regla de los signos, como porque es evidente, no tiene ninguna raiz positiva; luego la propuesta no tiene ninguna raiz real negativa; luego tiene dos raices reales positivas y dos imaginarias.

3.° Sea la ecuacion $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Esta ecuacion no tiene raices conmensurables, y por tanto no tiene raices iguales (73, *Corol.* 1.°).

El límite superior es 3.

$$\begin{array}{ll} x = 0, & -, \\ x = 1, & -, \\ x = 2, & -, \\ x = 3, & +. \end{array}$$

Resulta un cambio de signo; y como la ecuacion no tiene mas que una variacion, tampoco tiene mas que una sola raiz positiva, la cual está entre 2 y 3.

Mas adelante veremos que las otras dos raices de esta ecuacion son imaginarias.

87. Cuando los resultados de las sustituciones de los términos de la progresion

$$0, 1, 2, 3, \ldots. L$$

dan un número de cambios de signo menor que el número de variaciones de la ecuacion, no se podrá asegurar que la separacion está efectuada (*a*); pues, aunque en tal caso puede suceder que la ecuacion tenga raices imaginarias, y entre cada dos números que dan resultados de signo contrario no exista mas que una sola raiz real, y que por tanto las raices reales positivas esten separadas, esto no se puede saber desde luego, porque tambien puede suceder que entre dos números enteros consecutivos, que dan resultados de diferente signo, existan tres, cinco, etc. raices, y que entre dos números consecutivos, que dan resultados del mismo signo, existan dos, cuatro, etc. raices.

Ejemplos. 1.° Sea la ecuacion

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 3x - 8 = 0.$$

El límite superior de las raices positivas de esta ecuacion es 3.

$$\begin{array}{ll} x = 0, & -, \\ x = 1, & +, \\ x = 2, & +, \\ x = 3, & +. \end{array}$$

Resulta un solo cambio de signo en los resultados; por con-

(*a*) El número de cambios de signo de los resultados no puede ser mayor que el número de variaciones de la ecuacion; pues si esto fuera posible, el número de raices positivas seria mayor que el de variaciones.

siguiente, como la ecuacion es completa, y tiene tres variaciones y dos permanencias, sucederá uno de estos casos: 1.° la ecuacion tiene una raiz real entre 1 y 2, dos entre 0 y 1 ó entre 2 y 3, y dos negativas; 2.° una raiz real entre 1 y 2, dos entre 0 y 1 ó entre 2 y 3, y dos imaginarias; 3.° una raiz real entre 1 y 2, y cuatro imaginarias; 4.° tres raices reales entre 1 y 2, y dos negativas; 5.° tres raices reales entre 1 y 2, y dos imaginarias.

No podemos asegurar desde luego cuál de estos casos se verificará.

2.° Sea la ecuacion

$$x^3 - 2x + 5 = 0,$$

que es la transformada en $-x$ de la

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

que hemos considerado ya en el número anterior.

El límite de sus raices positivas es 3.

$$\begin{array}{ll} x = 0, & +, \\ x = 1, & +, \\ x = 2, & +, \\ x = 3, & +. \end{array}$$

Como no resulta ningun cambio de signo en los resultados, no sabemos si las dos raices diferentes de la raiz negativa, que sabemos tiene (51 *y* 86, *Ejemplo* 3°.), son positivas ó imaginarias.

En este caso, para separar las raices positivas, se formarán las funciones de Sturm

$$f(x),\ f'(x),\ X_1,\ X_2,\ X_3 \ldots,$$

y se hallará por la regla (82) el número de raices positivas de la ecuacion propuesta $f(x) = 0$; y si este número es igual al de cambios de signo de los resultados obtenidos sustituyendo en la ecuacion $f(x) = 0$ en vez de x los números $0, 1, 2, \ldots, L$, las raices positivas quedan separadas desde un principio, y la ecuacion tiene raices imaginarias, pues de otro modo el número de raices positivas seria igual al número de variaciones, siendo asi que es menor. Si el número de raices positivas de la ecuacion es mayor que el de cambios de signo de dichos resultados, entre dos números enteros consecutivos, que han dado resultados de signo contrario, existirán 3, 5, etc. raices, ó entre dos de estos números que han dado resultados del mismo signo, existirán 2,4, etc. raices. Para separar estas raices, se sustituirán en las funciones de Sturm los números $0, 1, 2, \ldots, L$, siendo L el límite superior de las raices positivas de la ecuacion: de este modo conoceremos á punto fijo, por el teorema de Sturm, los números de raices comprendidas entre 0 y 1, entre 1 y 2, entre 2 y 3...., entre $L - 1$ y L; y por tanto, sustituyendo en dichas funciones números intermedios en-

tre aquellos enteros consecutivos que comprenden dos ó mas raices, se llegará al cabo á separar dichas raices.

88. Para obtener los resultados de la sustitucion de estos números intermedios, conviene proceder con el órden siguiente:

Supongamos que entre los números enteros consecutivos 3 y 4 existan dos ó mas raices: sustituiremos en las funciones de Sturm en vez de x los términos de la progresion aritmética

$$3\,;\ 3{,}1\,;\ 3{,}2\,;\ 3{,}3\,;\ldots 4 \qquad [A].$$

Principiaremos por sustituir el término medio 3,5, y por los signos que tengan los resultados de esta sustitucion en las funciones, se conocerá el número de raices comprendidas entre 3 y 3,5, y entre 3,5 y 4. Si con esta sustitucion no se han separado las raices, y suponemos que entre 3 y 3,5 existen dos ó mas, sustituiremos en las funciones de Sturm en vez de x el número 3,2 (ó bien 3,3), y conoceremos por los signos de los resultados el número de raices comprendidas entre 3 y 3,2, y entre 3,2 y 3,5. Continuando esta sustitucion de los términos de la progresion [A], llegaremos á separar las raices, si entre cada dos términos consecutivos de la progresion [A] existe á lo mas una sola raiz.

En el caso contrario, por ejemplo, si entre 3,4 y 3,5 existen dos ó mas raices, se sustituirán en las funciones de Sturm los términos de la progresion aritmética

$$3{,}4\,;\ 3{,}41\,;\ 3{,}42\,;\ldots;\ 3{,}5$$

siguiendo el mismo órden que en las sustituciones precedentes, y se llegarán á separar las raices, si entre cada dos términos consecutivos de esta progresion existe á lo mas una sola raiz.

Pero si existieran dos ó mas entre dos de estos términos, por ejemplo, entre 3,45 y 3,46, se sustituirán en las funciones de Sturm los términos de la nueva progresion

$$3{,}45\,;\ 3{,}451\,;\ 3{,}452\,;\ldots;\ 3{,}46$$

siguiendo el mismo órden que en las sustituciones anteriores; y quedarán separadas las raices, si entre cada dos términos de la nueva progresion hay á lo mas una sola raiz comprendida; y asi sucesivamente.

De este modo, por pequeña que sea la diferencia de las raices inconmensurables, quedarán al cabo separadas.

Nota. Conviene, para la aproximacion final de la raiz, que los dos números que la comprenden, se diferencien en 1, ó en $\frac{1}{10}$, ó en $\frac{1}{100}$, etc.

Ejemplo. 1.° Sea la ecuacion $x^3 - 7x + 7 = 0$.

Esta ecuacion no tiene ninguna raiz conmensurable, y por tanto no puede tener raices iguales (73, *Corol.* 1.°).

El límite superior de las raices positivas de esta ecuacion es 3.

Haciendo $x = 0$, el resultado tiene el signo $+$,

$$x = 1, \qquad +,$$
$$x = 2, \qquad +.$$

La ecuacion tiene dos variaciones, y no resulta en estas sustituciones ningun cambio de signo; por consiguiente, como esta ecuacion tiene por lo menos una raiz real negativa, y como las tres no pueden ser reales negativas, porque el coeficiente del segundo término es 0, ó porque la transformada en $-x$ no presenta mas que una variacion, serán las otras dos imaginarias ó reales.

Para decidirlo, formemos las funciones de Sturm:

$$f(x) = x^3 - 7x + 7,$$
$$f'(x) = 3x^2 - 7,$$
$$X_1 = 2x - 3,$$
$$X_2 = 1.$$

El número de raices positivas de esta ecuacion es 2 (82), y por consiguiente el número de raices negativas es 1.

Para separar las dos raices positivas, sustituiremos en vez de x en las funciones de Sturm 0, 1, 2, y hallaremos estas combinaciones de signos:

$$x = 0, \qquad + - - +,$$
$$x = 1, \qquad + - - +,$$
$$x = 2, \qquad + + + +.$$

Luego las dos raices positivas se hallan entre 1 y 2.

Sustituiremos ahora en las funciones de Sturm 1,5 en vez de x, y los resultados, prescindiendo del resultado de la funcion X_1 que es 0 (81, *Observ.* 2.ª), presentan los signos

$$- - +,$$

que dan una variacion. Como la sustitucion de 1 ha dado dos variaciones, se infiere que entre 1 y 1,5 hay una sola raiz; por consiguiente la otra estará comprendida ente 1,5 y 2.

Quedan por lo tanto separadas las raices.

Para hallar, segun hemos dicho (88, *Nota*), dos números que se diferencien en $\frac{1}{10}$, y comprendan una sola raiz, sustituiremos en vez de x 1,2, y resultan dos variaciones; y como $x = 1,5$ da una variacion, la raiz está comprendida entre 1,2 y 1,5. Sustituyo ahora 1,4, y resulta una variacion; luego la raiz está comprendi-

da entre 1,2 y 1,4. Sustituyo finalmente 1,3, y resultan dos variaciones; luego la raiz está comprendida entre 1,3 y 1,4.

Del mismo modo se hallan los dos números 1,6 y 1,7 que comprenden la otra raiz.

Ejemplo 2.° Sea la ecuacion $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Ya hemos visto (86, *Ejemplo.* 3°.) que esta ecuacion tiene una sola raiz positiva.

Mudando x en $-x$, la ecuacion transformada será:

$$-x^3 + 2x - 5 = 0, \text{ ó } x^3 - 2x + 5 = 0,$$

la cual tiene dos variaciones, y por tanto (75, *Corol.*) la ecuacion propuesta tendrá á lo mas dos raices negativas, lo que es evidente por la misma ecuacion propuesta (36).

Como aquí existe la duda de que estas dos raices sean reales ó imaginarias, hallaremos las funciones de Sturm

$$f(x) = x^3 - 2x - 5,$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2,$$
$$X_1 = 4x + 15,$$
$$X_2 = -643.$$

El número de raices negativas de la ecuacion es 0 (82); luego las dos raices cuya naturaleza queríamos determinar, son imaginarias.

§ III. Aproximacion de las raices inconmensurables.

Método de las sustituciones intermedias.

89. Sea la ecuacion $f(x) = 0$, a y b dos números entre los cuales se halle sola comprendida la raiz inconmensurable, cuyo valor aproximado queremos hallar. Sustituyendo en vez de x un número c intermedio entre a y b, se conocerá por el signo del resultado, si la raiz está comprendida entre a y c, ó entre c y b. Supongamos que la raiz esté comprendida entre a y c: sustituyendo en vez de x un número d intermedio entre a y c, se conocerá por el signo del resultado, si la raiz está comprendida entre a y d, ó entre d y c; y asi sucesivamente.

Si queremos hallar la raiz con menor error que la parte alícuota $\frac{1}{q}$ de la unidad, continuaremos el cálculo de las sustituciones intermedias, hasta que encontremos dos números que se diferencien en $\frac{1}{q}$ ó en menos, y entre los cuales se halle comprendida la raiz; y entonces cualquiera de estos números será el valor de la raiz en menos de $\frac{1}{q}$.

Método de aproximacion de Lagrange.

90. Hemos visto en la separacion de las raices, que pueden hallarse para cada raiz inconmensurable dos números enteros consecutivos ó dos números que se diferencien en una parte alícuota de la unidad, y entre los cuales esté dicha raiz sola comprendida. Para la aproximacion ulterior por el método de Lagrange, conviene que cada raiz esté ella sola comprendida entre dos números enteros consecutivos. Veamos cómo puede conseguirse esto, sin perder nada de la aproximacion obtenida ya en la separacion de las raices, cuando los dos números que comprenden la raiz, se diferencian en la parte alícuota $\frac{1}{q}$ de la unidad. Supongamos que los dos números que comprenden la raiz, sean a y $a+\frac{1}{q}$: hagamos $x=\frac{y}{q}$, y sustituyendo en la ecuacion

$$f(x)=0,$$

resulta la ecuacion transformada

$$f\left(\frac{y}{q}\right)=0.$$

Como las raices de la transformada son q veces mayores que las de la ecuacion propuesta, segun lo prueba la relacion $y=qx$, la raiz en cuestion de la ecuacion propuesta tendrá su correspondiente de la ecuacion transformada comprendida entre qa y $qa+1$: porque si es r la raiz de la propuesta, qr será su raiz respectiva de la transformada, y pues $r \begin{smallmatrix} > a, \\ < a+\frac{1}{q} \end{smallmatrix}$, será $qr \begin{smallmatrix} > qa \\ < qa+1. \end{smallmatrix}$ Observése tambien que entre estos dos números enteros consecutivos qa y $qa+1$ no existirá mas que una sola raiz de la transformada

$$f\left(\frac{y}{q}\right)=0:$$

pues si esta ecuacion tuviese dos ó mas raices comprendidas entre qa y $qa+1$, la relacion $x=\frac{y}{q}$ nos daria tambien igual número de raices de la ecuacion propuesta comprendidas entre $\frac{qa}{q}$ y $\frac{qa+1}{q}$, ó entre a y $a+\frac{1}{q}$; lo que es contrario á la suposicion.

Queda, pues, reducida la cuestion á hallar un valor aproxi-

mado de la raiz, estando esta comprendida entre dos números enteros consecutivos (*a*).

91. Esto supuesto, el método de aproximacion de Lagrange consiste en hallar en fraccion contínua el valor de la ecuacion propuesta

$$f(x) = 0,$$

caso esplicado generalmente en el (*núm.* 2).

Sean a y $a + 1$ los dos números enteros consecutivos que comprenden la raiz: haremos segun el método (2)

$$x = a + \frac{1}{y},$$

siendo $y > 1$, pero inconmensurable: sustituyendo este valor en la ecuacion propuesta, tendremos la transformada

$$f\left(a + \frac{1}{y}\right) = 0,$$

ó desenvolviendo por el teorema de Taylor ó por el de Newton, y representando por $F(y)$ el primer miembro, será

$$F(y) = 0 \qquad [A].$$

En esta ecuacion y no puede tener mas que un solo valor mayor que 1; pues si y pudiese tener dos valores α y β mayores que 1, los cuales serian inconmensurables, seria

$$x = a + \frac{1}{\alpha},\ x = a + \frac{1}{\beta},$$

es decir, que x tendria dos valores comprendidos entre a y $a + 1$; contra lo supuesto.

Para hallar la parte entera de y, observo en primer lugar que el resultado $F(1)$ de la sustitucion de 1 en vez de y en el primer miembro de la ecuacion $[A]$ es negativo; suponiendo como

---

(*a*) Es menester observar que, á pesar del pequeño trabajo de esta transformacion, para reducir el caso en que los dos números que comprenden la raiz se diferencian en $\frac{1}{q}$ al caso en que los dos números se diferencien en 1, es ventajoso el que los dos números que comprenden la raiz, se diferencien en $\frac{1}{q}$, siendo q 10, 100, 1000, etc.; porque si por ejemplo queremos hallar en menos de $\frac{1}{10000}$ el valor aproximado de una raiz, comprendida entre dos números que se diferencien en $\frac{1}{100}$, haremos $x = \frac{y}{100}$, y hallando la raiz de la ecuacion transformada $f\left(\frac{y}{100}\right) = 0$ aproximada hasta centésimas, y dividiendo este valor aproximado por 100, tendremos en diezmilésimas el valor de la raiz de la ecuacion propuesta.

siempre que el primer término de esta ecuacion sea positivo, lo que ya se sabe cómo se consigue, si no lo es.

En efecto, sabemos que la ecuacion [A] tiene una sola raiz mayor que 1, y por tanto el límite superior de las raices positivas de esta ecuacion será mayor que 1. Sustituyendo en vez de x el límite superior, el resultado es positivo (48), y como entre 1 y L no hay mas que una raiz, $F(1)$ será negativo (50).

Sustituiré, pues, en la ecuacion [A] en vez de y los números 2,3,..... hasta llegar á uno $b+1$ que dé un resultado positivo, y entonces y estará comprendida entre b y $b+1$.

Haremos ahora, segun el método (2),

$$y = b + \frac{1}{z},$$

y sustituyendo en la ecuacion [A] en vez de y este valor, la nueva transformada será

$$F\left(b + \frac{1}{z}\right) = 0,$$

ó desenvolviendo, y llamando para abreviar $\varphi(z)$ al primer miembro, será

$$\varphi(z) = 0 \qquad [B].$$

Esta ecuacion no puede tener mas que una sola raiz mayor que 1, pues si tuviese dos raices α y β mayores que 1, seria

$$y = b + \frac{1}{\alpha},\ y = b + \frac{1}{\beta},$$

es decir, que entre b y $b+1$ existirian dos raices de la ecuacion [A] mayores que 1, contra lo demostrado. Para hallar la parte entera de z, sustituiremos, por la razon dicha ya, los números 2,3,... hasta llegar á uno $c+1$ que dé un resultado positivo.

Haremos en seguida

$$z = c + \frac{1}{u},$$

y hallaremos del mismo modo la parte entera de u; y asi sucesivamente.

Ahora, tendremos fácilmente

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \text{etc.}}}$$

Siendo inconmensurable el valor que se quiere hallar para x, la fraccion continua correspondiente será indefinida (3).

Supongamos que se quiera hallar el valor de la raiz en menos de $\frac{1}{q}$: á medida que se van hallando los cocientes incompletos a, b, c,..., se irán formando las reducidas; y cuando se llegue á una cuyo denominador sea $\overline{\overline{>}}\sqrt{q}$, dicha reducida será la primera que dará el valor de la raiz con menor error que $\frac{1}{q}$ (8, *Corol.* 2.°).

Nota. Representemos en general por

$$f(v) = Av^m + Bv^{m-1} + Cv^{m-2} + \ldots + Kv + L = 0$$

la ecuacion propuesta ó cualquiera de las transformadas.

Para hallar la transformada siguiente, supongamos que sea a la parte entera de v, y t la incógnita de la nueva ecuacion: haremos $v = a + \frac{1}{t}$; y por consiguiente la nueva transformada será

$$f\left(a + \frac{1}{t}\right) = 0;$$

ó desenvolviendo por el teorema de Taylor,

$$f(a) + f'(a)\frac{1}{t} + \frac{f''(a)}{2}\frac{1}{t^2} + \frac{f'''(a)}{2.3}\frac{1}{t^3} + \ldots + A\frac{1}{t^m} = 0,$$

ó bien,

$$f(a)t^m + f'(a)t^{m-1} + \frac{f''(a)}{2}t^{m-2} + \frac{f'''(a)}{2.3}t^{m-3} + \ldots + A = 0 \quad [T],$$

ecuacion que sirve para hallar todas las transformadas, teniendo presente que $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$... son los resultados de la sustitucion del entero a en el primer miembro de la ecuacion anterior á la transformada que se quiere hallar, y en las derivadas de este primer miembro.

Nosotros llamaremos á la ecuacion $[T]$ la *transformada general.*

Siempre que la ecuacion pase del tercer grado, conviene efectuar los desenvolvimientos por la transformada general; si no, es indiferente valerse de la transformada general, ó de las reglas del cuadrado y cubo de un binomio.

Ejemplo 1.° $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Hemos visto que esta ecuacion no tiene mas que una raiz real, que es positiva, y se halla entre 2 y 3.

Tratamos de hallar esta raiz en menos de $\frac{1}{10000}$

Haremos $$x = 2 + \frac{1}{y},$$

la cual tendrá una raiz comprendida entre 13 y 14, y otra entre 16 y 17.

Hagamos pues

$$x' = 13 + \frac{1}{y},$$

y sustituyendo este valor en la ecuacion [A], y desenvolviendo su primer miembro, tendremos

$$97y^3 - 193y^2 + 39y + 1 = 0 \qquad [1].$$

Dando á y el valor 2, el resultado es positivo; luego y se halla comprendida entre 1 y 2; haremos pues

$$y = 1 + \frac{1}{z};$$

y por consiguiente

$$x' = 13 + \frac{1}{1 + \frac{1}{z}},$$

y las dos primeras reducidas son $\frac{13}{1}, \frac{14}{1}$.

Sustituyendo el valor de y en la ecuacion [1], y desenvolviendo, tendremos

$$56z^3 + 56z^2 - 98z - 97 = 0 \qquad [2].$$

Dando á z el valor 2, el resultado es positivo; luego z está comprendida entre 1 y 2. Hagamos pues

$$z = 1 + \frac{1}{u},$$

y por consiguiente

$$x' = 13 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{u}}},$$

y la reducida tercera es $\frac{27}{2}$.

Sustituyendo en la ecuacion [2] el valor de z, y desenvolviendo, tendremos

$$83u^3 - 182u^2 - 224u - 56 = 0 \qquad [3].$$

Dando á u los valores 2, 3, 4, el último da resultado posi-

tivo; luego u está comprendida entre 3 y 4. Haremos pues

$$u = 3 + \frac{1}{v},$$

y por consigniente

$$x' = 13 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{v}}}},$$

y la cuarta reducida es $\frac{95}{7}$.

Sustituyendo en la ecuacion [3] el valor de u, y desenvolviendo, resulta la transformada

$$125v^3 - 925v^2 - 565v - 83 = 0.$$

Es fácil ver que, mientras sea $v < 8$, el resultado es negativo, y si $v = 8$ será el resultado positivo; luego v se halla comprendida entre 7 y 8.

Hago pues

$$v = 7 + \frac{1}{t},$$

y por consiguiente

$$x' = 13 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{t}}}}},$$

y la quinta reducida será $\frac{692}{51}$, que es la primera que se diferencia del valor de x' en menos que $\frac{1}{1000}$, pues su denominador es mayor que $\sqrt{1000}$.

Convirtiéndola en fraccion decimal, resulta 13,5686..... con un error por defecto, por ser reducida de lugar impar, menor

que $\frac{1}{1000}$. Luego x' está comprendida entre 13,5686 y 13,5696, y con mayor razon está comprendida entre 13,568 y 13,570, luego $x' = 13,569$ con menor error que $\frac{1}{1000}$.

Por consiguiente, como $x = \frac{x'}{10}$, será $x = 1,3569$ con menor error que $\frac{1}{10000}$.

Del mismo modo se halla la raiz comprendida entre 1,6 y 1,7, que es 1,6920.

La raiz negativa puede hallarse, mudando x en $-x$ en la ecuacion, lo que nos da la transformada

$$x^3 - 7x - 7 = 0;$$

y aplicando ahora á la raiz de esta ecuacion, comprendida entre 3 y 4, el método anterior. Pero en el ejemplo actual puede hallarse la tercera raiz inmediatamente: pues si α es la raiz negativa, tendremos (36)

$$\alpha + 1,3569 + 1,6920 = 0,$$

y por consiguiente $\alpha = -3,0489$.

Ejemplo 3.° Sea la ecuacion $x^4 - 5x^3 - x^2 + 15x - 6 = 0$.

Hemos visto en la separacion de las raices, que esta ecuacion tiene una raiz comprendida entre 1 y 2.

Tratemos de hallar dicha raiz con menor error que $\frac{1}{100}$.

Como esta ecuacion pasa del tercer grado, nos valdremos para los desenvolvimientos de la transformada general, que en este caso es (91, *Nota*)

$$f(a).t^4 + f'(a).t^3 + \frac{f''(a)}{2}t^2 + \frac{f'''(a)}{6}t + \frac{f^{\text{v}}(a)}{24} = 0.$$

En primer lugar haremos

$$x = 1 + \frac{1}{y}.$$

Para hallar la primera transformada, tengo

$$f(x) = x^4 - 5x^3 - x^2 + 15x - 6,$$
$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 - 2x + 15,$$
$$f''(x) = 12x^2 - 30x - 2.$$
$$f'''(x) = 24x - 30,$$
$$f^{iv}(x) = 24.$$

Luego

$$f(1) = 4,$$
$$f'(1) = 2,$$
$$f''(1) = -20,$$
$$f'''(1) = -6,$$
$$f^{iv}(1) = 24.$$

Sustituyendo estos valores en la transformada general, la primera transformada será

$$4y^4 + 2y^3 - 10y^2 - y + 1 = 0.$$

Dando á y el valor 2, el resúltado es positivo: luego y está comprendida entre 1 y 2. Hago pues

$$y = 1 + \frac{1}{z};$$

y por consiguiente

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{z}}.$$

Las dos primeras reducidas son $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$.

Para hallar la transformada segunda, tengo

$$f(y) = 4y^4 + 2y^3 - 10y^2 - y + 1,$$
$$f'(y) = 16y^3 + 6y^2 - 20y - 1,$$
$$f''(y) = 48y^2 + 12y - 20,$$
$$f'''(y) = 96y + 12,$$
$$f^{iv}(y) = 96:$$

por consiguiente

$$f(1) = -4,$$
$$f'(1) = 1,$$
$$f''(1) = 40,$$
$$f'''(1) = 108,$$
$$f^{iv}(1) = 96.$$

Sustituyendo estos valores en la transformada general, la segunda transformada, despues de mudar los signos á todos sus términos, es

$$4z^4 - z^3 - 20z^2 - 18z - 4 = 0.$$

Dando á z los valores 2, 3, este último término nos da resultado positivo; luego z está comprendida entre 2 y 3. Hago pues

$$z = 2 + \frac{1}{u},$$

y por consiguiente

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{u}}}.$$

y la reducida tercera es $\frac{5}{3}$.

Tenemos ahora, para hallar la tercera transformada,

$$\begin{aligned} f(z) &= 4z^4 - z^3 - 20z^2 - 18z - 4, \\ f'(z) &= 16z^3 - 3z^2 - 40z - 18, \\ f''(z) &= 48z^2 - 6z - 40, \\ f'''(z) &= 96z - 6, \\ f^{\text{IV}}(z) &= 96; \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} f(2) &= -\ 64, \\ f'(2) &= 18, \\ f''(2) &= 140, \\ f'''(2) &= 186, \\ f^{\text{V}}(2) &= 96. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la transformada general, resulta la tercera transformada, despues de mudar los signos á todos sus términos,

$$64u^4 - 18u^3 - 70u^2 - 31u - 4 = 0.$$

Sustituyendo 2 en vez de u, el resultado es positivo: hago pues

$$u = 1 + \frac{1}{x'},$$

y por consiguiente

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x'}}}},$$

y la cuarta reducida es $\frac{7}{4}$.

Para hallar la cuarta transformada, tengo

$$\begin{aligned} f(u) &= 64u^4 - 18u^3 - 70u^2 - 32u - 4, \\ f'(u) &= 256u^3 - 54u^2 - 140u - 32, \\ f''(u) &= 768u^2 - 108u - 140, \\ f'''(u) &= 1536u - 108, \\ f^{iv}(u) &= 1536: \end{aligned}$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} f(1) &= -\ 59, \\ f'(1) &= 31, \\ f''(1) &= 520, \\ f'''(1) &= 1428, \\ f^{v}(1) &= 1536. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la transformada general, y mudando los signos á todos los términos, resulta la cuarta transformada

$$59x'^4 - 31x'^3 - 260x'^2 - 238x' - 64 = 0.$$

Sustituyendo en lugar de x' el número 2, el resultado es negativo. Sustituyendo 3, el resultado es positivo. Por consiguiente x' está comprendida entre 2 y 3: haremos pues para la transformada siguiente

$$x' = 2 + \frac{1}{y'};$$

y por consiguiente

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y'}}}}}.$$

La reducida quinta es $\frac{19}{11}$, que es la suficiente, pues su denominador es mayor que $\sqrt{100}$ (8, *Corol.* 2.°).

Reduciendo esta fraccion á decimales, es 1,7272..., cuyo error por defecto, por ser la reducida $\frac{19}{11}$ de lugar impar, no llega á $\frac{1}{100}$. Luego la raiz que queríamos hallar está comprendida entre

$$1{,}7272\ldots \text{ y } 1{,}7372\ldots;$$

y con mas razon se halla entre 1,72 y 1,74; luego 1,73 es el valor de dicha raiz con menor error que $\frac{1}{100}$.

Método de aproximacion de Newton.

92. Cuando por el método de las sustituciones intermedias, ó por el de Lagrange, ó por la separacion de las raices, se han hallado dos números cuya diferencia sea $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$, etc., y entre los cuales se halle comprendida la raiz, se puede continuar la aproximacion con gran rapidez por el siguiente método.

Sea a una de dichos números, y lo que le falta para ser el valor de la raiz (para fijar las ideas, supondremos que y es menor que 0,1): será $x = a + y$. Sustituyendo este valor en la ecuacion, tendremos

$$f(a + y) = 0,$$

y desenvolviendo por el teorema de Taylor, será

$$f(a) + f'(a).y + \frac{f''(a)}{2}y^2 + \frac{f'''(a)}{2.3}y^3 + \ldots + y^m = 0,$$

de donde

$$y = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{1}{f'(a)}\left(\frac{f''(a)}{2}y^2 + \frac{f'''(a)}{2.3}y^3 + \ldots + y^m\right) \quad [D].$$

Siendo $y < \frac{1}{10}$, será $y^2 < \frac{1}{100}, y^3 < \frac{1}{1000}$, etc. Admitamos que

$$\frac{1}{f'(a)}\left(\frac{f''(a)}{2}y^2 + \frac{f'''(a)}{2.3}y^3 + \ldots + y^m\right) < \frac{1}{100},$$

lo que sucede ordinariamente, aunque hay casos de escepcion:

tendremos

$$y = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

cociente que se diferenciará del valor verdadero de y en menos que $\frac{1}{100}$.

Reduciremos pues este cociente á centésimas, y añadiendolo á a, se tendrá el valor de la raiz con dos decimales de aproximacion.

Sea b este nuevo valor aproximado de x: haremos como antes $x = b + y$; y del mismo modo que en el caso anterior, y por igual razonamiento, obtendremos en menos de $\frac{1}{10000}$

$$y = -\frac{f(b)}{f'(b)},$$

valor que añadido á b, nos dará un nuevo valor de x con cuatro decimales de aproximacion.

Sea c este nuevo valor aproximado de x: tendremos del mismo modo la nueva correccion aproximada hasta ocho decimales

$$y = -\frac{f(c)}{f'(c)},$$

que añadida á c, nos dará el valor de x con ocho decimales.

En la correccion siguiente se obtendria el valor de la raiz con 16 decimales, etc.

Obsérvese que todas estas correcciones resultan de la fórmula

$$y = -\frac{f(x)}{f'(x)},$$

en la cual se sustituyen por x sucesivamente los valores aproximados a, b, c, etc.

Ya hemos dicho que no siempre se verifica que el segundo término que se desprecia en el segundo miembro de la ecuacion [D], es menor que $\frac{1}{100}$ en la primera correccion, menor que $\frac{1}{10000}$ en la segunda, etc.; y aun cuando asi fuera, al reducir el valor de y á decimales, se origina un nuevo error, pues se desprecian las cifras siguientes á las que se deben tomar, ó si la pri-

mera de las despreciadas no es menor que 5, se añade 1 á la última de las que quedan: por consiguiente la aproximacion obtenida no es segura. Para quitar toda duda, se sustituyen (en la primera correccion) los números $b - \frac{1}{100}$, b, $b + \frac{1}{100}$ en vez de x en $f(x)$; y si el resultado de la primera ó tercera sustitucion es de diferente signo del resultado de la segunda, no hay duda que la aproximacion es buena (49). Si no sucede asi, será menester alterar la cifra de las centésimas en una ó mas unidades, hasta que se obtengan dos números que se diferencien en una centésima, y que sustituidos en la ecuacion den resultados de signo contrario.

Lo mismo se hará en las siguientes correcciones.

Si sucediere que las dos primeras cifras decimales del valor de y, ó mayor número de dichas primeras cifras decimales, fuesen ceros, en la primera correccion, se continuará hallando cifras decimales hasta que resulte una cifra significativa. En la segunda correccion se tendrá un número duplo de decimales, cuádruplo en la tercera, etc.

Ejemplo. Sea la ecuacion

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

cuyas raices hemos hallado por el método de Lagrange.

Tratemos ahora de hallar por el método de Newton la raiz comprendida entre 1,3 y 1,4.

Tenemos que la fórmula de las correcciones

$$y = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

es en este caso

$$y = -\frac{x^3 - 7x + 7}{3x^2 - 7}.$$

Sustituyendo en vez de x 1,3, resulta $y = \frac{9,7}{193} = 0,06$; luego $x = 1,35$.

Para asegurarme de esta aproximacion, sustituyo en la ecuacion en vez de x 1,34, y el resultado es positivo: sustituyo en la misma ecuacion en vez de x 1,35, y el resultado es tambien positivo: sustituyo ahora en vez de x 1,36, y el resultado es negativo; luego la raiz está comprendida entre 1,35 y 1,36; y la aproximacion obtenida es buena.

Sustituyendo ahora en la fórmula de las correcciones en vez de y 1,35; y aprovechándome de los resultados obtenidos ya en los tanteos anteriores, tendré

$$y = \frac{0,010375}{1,5325} = \frac{103,75}{15325} = 0,0068;$$

y por consiguiente $x = 1,3568$. Hecha la comprobacion de la sustitucion de este número y del 1,3567, se verá que sus cifras son exactas. En la correccion siguiente resultarian 8 decimales.

34

LIBRO CUARTO.

ECUACIONES RECÍPROCAS; RESOLUCION ALGÉBRICA DE LAS ECUACIONES BINOMIAS; RESOLUCION ALGÉBRICA DE LAS ECUACIONES DE TERCERO Y CUARTO GRADO; RESOLUCION TRIGONOMÉTRICA DEL CASO IRREDUCIBLE DE LAS ECUACIONES DE TERCER GRADO.

CAPÍTULO I.

Ecuaciones recíprocas.

93. Se llama ecuacion *recíproca* la ecuacion que no se altera mudando en ella x en $\frac{1}{x}$.

Sea la ecuacion

$$x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0:$$

mudando x en $\frac{1}{x}$, la nueva ecuacion será

$$\frac{1}{x^3} - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x} - 1 = 0,$$

ó bien

$$1 - \frac{7}{2}x + \frac{7}{2}x^2 - x^3 = 0,$$

ó

$$x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0,$$

ecuacion idéntica á la propuesta: luego esta es una ecuacion recíproca.

94. Segun la definicion de la ecuacion recíproca, las dos ecuaciones

$$f(x) = 0$$

y

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

son una misma; luego, partiendo la unidad por cada una de las raices de una ecuacion recíproca, resultan las mismas raices.

De donde se infiere que, si la ecuacion recíproca tiene una raiz a, diferente de 1, tambien tiene la raiz $\frac{1}{a}$, que evidentemente es diferente de 1.

En cuanto á la raiz 1 ó — 1, puede estar sola; pues partiendo 1 por 1 ó por — 1, resulta tambien 1 ó — 1.

Esto lo vemos confirmado en la ecuacion recíproca

$$x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0,$$

cuyas raices son 1, 2 y $\frac{1}{2}$, y partiendo 1 por cada una de ellas, los cocientes son 1, $\frac{1}{2}$, 2.

95. *Toda ecuacion recíproca de grado par tiene iguales los coeficientes de los términos equidistantes de los estremos; ó iguales y de signo contrario, faltando necesariamente en este último caso el término medio de la ecuacion.*

Sea la ecuacion recíproca de grado par

$$x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0.$$

Siendo recíproca esta ecuacion, no se alterará mudando en ella x en $\frac{1}{x}$: la ecuacion transformada es

$$\frac{1}{x^6} + \frac{a}{x^5} + \frac{b}{x^4} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x^2} + \frac{e}{x} + f = 0,$$

ó $$1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 = 0,$$

ó $$x^6 + \frac{e}{f}x^5 + \frac{d}{f}x^4 + \frac{c}{f}x^3 + \frac{b}{f}x^2 + \frac{a}{f}x + \frac{1}{f} = 0.$$

Debiendo ser esta ecuacion la misma que la propuesta, tendremos

$$\frac{e}{f} = a,\ \frac{d}{f} = b,\ \frac{c}{f} = c,$$

$$\frac{b}{f} = d,\ \frac{a}{f} = e,\ \frac{1}{f} = f.$$

De la última ecuacion resulta $f^2 = 1$, y por consiguiente $f = 1$, ó $f = -1$.

Siendo $f = 1$, será $e = a$, $d = b$, que es lo primero que queríamos demostrar.

Siendo $f = -1$, será $e = -a$, $d = -b$,

$$c = -c, \text{ ó } 2c = 0, \text{ ó } c = 0,$$

que es la conclusion de la segunda parte del teorema.

Recíproco. *Si en una ecuacion de grado par los coeficientes de los términos equidistantes de los estremos son iguales; ó son iguales y de signo contrario, faltando en este caso el término medio, dicha ecuacion es recíproca.*

Se demostrará fácilmente este recíproco, haciendo ver que en cualquiera de estos dos casos, la ecuacion queda la misma, mudando en ella x en $\frac{1}{x}$.

Asi, la ecuacion

$$x^4 - \frac{3}{5}x^3 + 2x^2 - \frac{3}{5}x + 1 = 0,$$

en que los coeficientes de los términos equidistantes de los estremos son iguales, es recíproca.

La ecuacion

$$x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 1 = 0,$$

ó completándola para mayor facilidad,

$$x^6 + 0x^5 - 2x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1 = 0$$

es recíproca por la misma razon.

La ecuacion

$$2x^6 + 3x^4 - 3x^2 - 2 = 0,$$

ó $$2x^6 + 0x^5 + 3x^4 + 0x^3 - 3x^2 - 0x - 2 = 0$$

es recíproca, puesto que los coeficientes de los términos equidistantes de los estremos son iguales y de signo contrario, y que además falta el término medio.

Es fácil comprobar, mudando x en $\frac{1}{x}$, que todas estas ecuaciones son recíprocas.

96. *Toda ecuacion recíproca de grado impar tiene iguales los coeficientes de cada dos términos equidistantes de los estremos, ó iguales y de signo contrario.*

Sea la ecuacion recíproca de grado impar

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Siendo recíproca esta ecuacion, no sufrirá alteracion mudando en ella x en $\frac{1}{x}$; luego la ecuacion

$$\frac{1}{x^5} + \frac{a}{x^4} + \frac{b}{x^3} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x} + e = 0,$$

ó la

$$ex^5 + dx^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

ó la

$$x^5 + \frac{d}{e}x^4 + \frac{c}{e}x^3 + \frac{b}{e}x^2 + \frac{a}{e}x + \frac{1}{e} = 0$$

debe ser idéntica á la propuesta; y por tanto

$$\frac{1}{e} = e, \frac{a}{e} = d, \frac{b}{e} = c, \frac{c}{e} = b.$$

La primera nos da $e = \pm 1$.

Siendo $e = 1$, resulta $a = d$, $b = c$, que es la primera parte del teorema.

Siendo $e = -1$, resulta $a = -d$, $b = -c$, que es la segunda parte del teorema.

Recíproco. *Si en una ecuacion de grado impar los coeficientes de cada dos términos equidistantes de los estremos son iguales, ó iguales y de signo contrario, dicha ecuacion es recíproca.*

Se demuestra fácilmente este recíproco, haciendo ver que en cualquiera de estos dos casos la ecuacion queda la misma mudando en ella x en $\frac{1}{x}$.

Asi, la ecuacion

$$x^5 - \frac{3}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 1 = 0,$$

ó completándola,

$$x^5 + 0x^4 - \frac{3}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 0x + 1 = 0$$

es recíproca, porque los coeficientes de los términos equidistantes de los estremos son iguales.

La ecuacion

$$x^7 - \frac{3}{2}x^6 + x^5 + 2x^4 - 2x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

es recíproca, porque los coeficientes de los términos equidistantes de los estremos son iguales y de signo contrario.

Es fácil comprobar que cada una de estas dos ecuaciones es recíproca.

97. Antes de entrar en la resolucion de las ecuaciones recíprocas, demostraremos una fórmula, que sirve para hallar la suma de las potencias del mismo grado de dos cantidades recíprocas por medio de las potencias inferiores de dichas cantidades.

La fórmula es la siguiente:

$$x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}}=\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right).$$

Para demostrarla, no hay mas que efectuar la multiplicacion indicada en el primer término del segundo miembro de esta igualdad.

Tendremos

$$\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}}+x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}},$$

de donde

$$x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}}=\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right).$$

98. Pasemos ahora á ver cómo puede rebajarse el grado de una ecuacion recíproca.

Obsérvese en primer lugar que una ecuacion es recíproca:

1.° Cuando es de grado par, y los coeficientes de los términos equidistantes de los estremos son respectivamente iguales.

2.° Cuando es de grado par, y los coeficientes de los términos equidistantes de los estremos son respectivamente iguales y de diferente signo, faltando ademas el término medio.

3.° y 4.° Cuando es de grado impar, y los coeficientes de los términos equidistantes de los estremos son respectivamente iguales, ó respectivamente iguales y de signo contrario.

Ahora bien, si una ecuacion recíproca de grado par se halla en el segundo caso, tendrá una ó varias raices iguales á ± 1; pues de lo contrario, segun se infiere de la definicion de las ecuaciones recíprocas, sus raices serian recíprocas dos á dos, y por tanto su producto seria 1 (*a*); luego 1 seria el último término de la ecuacion, contra lo supuesto de que es -1.

(*a*) Suponemos que el coeficiente del primer término es 1.

Si una ecuacion recíproca es de grado impar, tendrá una ó varias raices iguales á ± 1; pues sino, sus raices serian recíprocas dos á dos, y por tanto la ecuacion seria de grado par.

Esto supuesto, si se nos da una ecuacion recíproca que no se halle en el primer caso, suprimiremos todas sus raices iguales á ± 1, para lo cual dividiremos su primer miembro por el producto de los factores binomios correspondientes, y el cociente igualado á cero tendrá por raices todas las restantes de la ecuacion; y pues estas raices son diferentes de ± 1, serán recíprocas dos á dos; luego la nueva ecuacion se hallará en el primer caso de las ecuaciones recíprocas, esto es, en el caso en que los coeficientes de los términos equidistantes de los estremos son respectivamente iguales.

No tenemos pues que ocuparnos mas que de las ecuaciones recíprocas de grado par, en las que los coeficientes de los términos equidistantes de los estremos son iguales respectivamente.

Demostremos que estas ecuaciones recíprocas pueden, por una transformacion, reducirse á un grado mitad; y veamos de paso cómo se ejecuta esta reduccion.

Sea la ecuacion recíproca

$$x^{2m} + Px^{2m-1} + Qx^{2m-2} + \ldots + Qx^2 + Px + 1 = 0.$$

Partamos esta ecuacion por x^m, y dicha ecuacion será

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots\ldots + \frac{Q}{x^{m-2}} + \frac{P}{x^{m-1}} + \frac{1}{x^m} = 0;$$

ó bien, juntando las potencias de mismo grado de las dos cantidades recíprocas x y $\frac{1}{x}$,

$$\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + P\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + Q\left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right) + \ldots = 0;$$

Hagamos $x + \frac{1}{x} = y$, será por consiguiente (97)

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^0 + \frac{1}{x^0}\right),$$

ó $$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2;$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right),$$

ó $$x^3 + \frac{1}{x^3} = (y^2 - 2)\,y - y = y^3 - 3y;$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right),$$

ó $$x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 3y^2 - y^2 + 2 = y^4 - 4y^2 + 2;$$

etc.

Vemos, pues, que la ecuacion propuesta será, despues de la eliminacion de x, del grado m con respecto á y.

Resuelta esta ecuacion, y poniendo los m valores de y en la ecuacion $x + \frac{1}{x} = y$, de donde

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2},$$

tendremos los $2m$ valores de x.

CAPÍTULO II.

Resolucion algébrica de las ecuaciones binomias.

99. Digimos (*Alm. elem.* 197) que se llama ecuacion de *dos términos* ó ecuacion *binomia* la ecuacion que, despues de las operaciones ordinarias, tiene la forma

$$ax^m = \pm b,$$

ó partiendo por a,

$$x^m = \pm \frac{b}{a},$$

y haciendo $\frac{b}{a} = p$,

$$x^m = \pm p.$$

100. Antes de entrar en la resolucion de estas ecuaciones, haremos las observaciones siguientes:

1.ª Pasando $\pm p$ al primer miembro, dichas ecuaciones serán

$$x^m \mp p = 0:$$

la derivada del primer miembo es mx^{m-1}, la cual no tiene ningun factor comun, funcion de x, con $x^m \mp p$; luego (70) *las ecuaciones binomias no tienen raices iguales.*

2.ª Segun la ecuacion

$$x^m = \pm p,$$

x es una cantidad que elevada á la potencia cuyo grado es m, da $\pm p$; luego x es la raiz del grado m de $\pm p$; y como en esta ecuacion tiene x m valores, todos desiguales, segun la anterior observacion, se infiere que toda cantidad tiene tantas raices

todas desiguales, como unidades tiene el grado de la raiz.

3.ª Sea α la raiz aritmética del grado m de p (*a*), será $\alpha^m = p$, y por consiguiente

$$x^m = \pm \alpha^m;$$

y si ahora hacemos (41)

$$x = \alpha y,$$

será

$$y^m = \pm 1:$$

luego, cuando se hayan resuelto estas últimas ecuaciones, se tendrán los m valores de x, multiplicando por α los m valores de y; y pues los valores de y son las raices del grado m de ± 1, se infiere que *las raices del grado* m *de una cantidad positiva* p *pueden hallarse, multiplicando su raiz aritmética por las raices del mismo grado de* 1; *y las raices del grado* m *de una cantidad negativa* — p *pueden hallarse multiplicando la raiz aritmética de su valor absoluto* p *por las raices del grado* m *de* — 1.

101. Pasemos pues á la resolucion general de las ecuaciones binomias

$$y^m \pm 1 = 0.$$

Como m puede ser par ó impar, tendremos que considerar los cuatro casos siguientes:

$$y^{2m} = 1,$$
$$y^{2m} = -1,$$
$$y^{2m+1} = 1,$$
$$y^{2m+1} = -1.$$

Primer caso. $y^{2m} = 1$, ó $y^{2m} - 1 = 0$.

Hallándose esta ecuacion recíproca en el segundo caso (98, 2.º), tendrá raices iguales á ± 1; y en efecto, esta ecuacion tiene evidentemente las raices 1 y — 1, y no puede admitir ninguna otra raiz real; pues cualquiera cantidad real, diferente de 1 y de — 1, elevada á una potencia de grado par da un resultado positivo diferente de 1.

Dividiendo su primer miembro por $(y+1)(y-1) = y^2 - 1$, se reducirá al primer caso (98).

La ecuacion $y^{2m} - 1 = 0$ puede tambien resolverse, transformándola en

$$(y^m + 1)(y^m - 1) = 0.$$

Es evidente que todo valor de y, que anule á uno de estos dos factores, será raiz de la ecuacion propuesta; luego esta ecuacion

(*a*) Suponemos que p es una cantidad real: para el caso en que p es imaginaria, véase el Complemento de nuestra trigonometría.

quedará resuelta, resolviendo las dos ecuaciones

$$y^m + 1 = 0,$$
$$y^m - 1 = 0.$$

Ejemplo. Sea la ecuacion $y^6 - 1 = 0$.

Siendo el primer miembro de esta ecuacion reciproca divisible por $y^2 - 1$, efectuaremos esta division, y el cociente igualado á cero, que es

$$y^4 + y^2 + 1 = 0,$$

será una ecuacion reciproca que puede rebajarse á una ecuacion de segundo grado (98).

Partamos, para esto, la ecuacion por y^2, y tendremos

$$y^2 + 1 + \frac{1}{y^2} = 0 \qquad [1].$$

Hago ahora

$$y + \frac{1}{y} = z \qquad [2],$$

y por consiguiente

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2;$$

y sustituyendo este valor en la ecuacion [1], será

$$z^2 - 1 = 0,$$

de donde $$z = \pm 1.$$

Sustituyendo sucesivamente los valores de z en la ecuacion [2], tendremos las dos ecuaciones

$$y + \frac{1}{y} = 1,$$
$$y + \frac{1}{y} = -1.$$

La 1.ª nos da $$y^2 - y + 1 = 0,$$

de donde $$y = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

La 2.ª nos da $$y^2 + y + 1 = 0,$$

de donde $$y = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Luego los seis valores de y en la ecuacion propuesta son:

$$1, -1, \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Resolvamos la misma ecuacion por el segundo mètodo.

Tenemos

$$y^6 - 1 = 0,$$

ó

$$(y^3 - 1)(y^3 + 1 = 0.$$

La ecuacion

$$y^3 - 1 = 0$$

nos da (*Alg. elem.* 197, 2.° *Caso*)

$$y = 1,$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2},$$

y la ecuacion

$$y^3 + 1 = 0,$$

nos da (*Alg. elem.* 197, 2.° *Caso*)

$$y = -1$$

$$y = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2},$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Segundo caso. $y^{2m} = -1$, ó $y^{2m} + 1 = 0$.

Esta ecuacion no puede tener ninguna raiz real; pues cualquiera cantidad real elevada á una potencia de grado par da un resultado positivo.

Ya sabemos (98) reducir á un grado mitad esta ecuacion recíproca de grado par.

Ejemplo. Sea la ecuacion

$$y^6 + 1 = 0.$$

Partiendo esta ecuacion recíproca por y^3, tendré

$$y^3 + \frac{1}{y^3} = 0.$$

Haciendo

$$y + \frac{1}{y} = z \qquad [A],$$

y sustituyendo en la ecuacion anterior el valor de $y^3 + \frac{1}{y^3}$, que es $z^3 - 3z$, tendremos

$$z^3 - 3z = 0,$$

de donde

$$z = 0,\ z = \sqrt{3},\ z = -\sqrt{3}.$$

Poniendo sucesivamente en la ecuacion [A] en vez de z sus valores, tendremos las tres ecuaciones

$$y + \frac{1}{y} = 0,$$

$$y + \frac{1}{y} = \sqrt{3},$$

$$y + \frac{1}{y} = -\sqrt{3}.$$

La primera nos da

$$y = \pm\sqrt{-1},$$

la segunda

$$y = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2},$$

y la tercera

$$y = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2}.$$

Tercer caso. $y^{2m+1} = 1$, ó $y^{2m+1} - 1 = 0$.

Siendo esta ecuacion recíproca de grado impar, tiene una ó mas raices iguales á 1 ó -1; y en efecto, esta ecuacion tiene evidentemente la raiz 1, y no puede tener ninguna otra raiz real; pues en primer lugar una cantidad real negativa elevada á una potencia de grado impar da un resultado negativo, el cual no puede ser igual á 1. En segundo lugar una cantidad positiva diferente de 1 elevada á una potencia cualquiera, da tambien un resultado diferente de 1.

Dividiendo su primer miembro por $y - 1$, se reducirá al primer caso de las ecuaciones recíprocas.

Ejemplo 1.° Sea la ecuacion

$$y^5 = 1, \text{ ó } y^5 - 1 = 0.$$

Partiendo su primer miembro por $y - 1$, é igualando el cociente á cero, tendremos la ecuacion

$$y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0.$$

Para resolve resta ecuacion recíproca, partamos su primer miembro por y^2 (98), y tendremos

$$y^2 + y + 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = 0,$$

ó bien

$$\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + 1 = 0.$$

Hagamos

$$y + \frac{1}{y} = z \qquad [A],$$

y por consiguiente

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2;$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion propuesta, será

$$z^2 - 2 + z + 1 = 0,$$

ó

$$z^2 + z - 1 = 0.$$

De aquí resulta

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Sustituyendo sucesivamente estos dos valores en la ecuacion [A], y despejando la y, tendremos

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\sqrt{-1}}{4}$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\sqrt{-1}}{4}.$$

Ejemplo 2.° Sea la ecuacion

$$y^7 = 1, \text{ ó } y^7 - 1 = 0.$$

Dividiendo el primer miembro por $y - 1$, é igualando el cociente á cero, tendremos la ecuacion recíproca

$$y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0.$$

Partiendo esta ecuacion por y^3, será

$$y^3 + y^2 + y + 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} = 0,$$

ó

$$\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) + \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + 1 = 0.$$

Haciendo

$$y + \frac{1}{y} = z,$$

y por consiguiente

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2.$$

$$y^3 + \frac{1}{y^3} = z^3 - 2z - z = z^3 - 3z,$$

y sustituyendo, resulta la transformada de tercer grado

$$z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0.$$

Resolviendo esta ecuacion, cuyas raices son todas reales (86), tendremos por la ecuacion [*A*] los valores de y.

Cuarto caso. Sea la ecuacion

$$y^{2m+1} = -1,$$

ó

$$y^{2m+1} + 1 = 0.$$

Esta ecuacion recíproca es de grado impar, y por tanto tendrá una ó varias raices iguales á 1 ó — 1; y efectivamente dicha ecuacion tiene la raiz real — 1: dividiendo su primer miembro por $y + 1$, se reducirá al primer caso de las ecuaciones recíprocas.

Nota. Obsérvese que esta ecuacion es la transformada en $-y$ de la ecuacion

$$y^{2m+1} - 1 = 0$$

del caso anterior.

102. Las ecuaciones transformadas que han resultado en los ejemplos propuestos haciendo

$$y + \frac{1}{y} = z,$$

han tenido, despues de eliminar la y, todas sus raices reales: esto se verifica siempre, segun lo indica el teorema siguiente.

La ecuacion en z, *que resulta de la eliminacion de* y *entre la ecuacion* $y^n = \pm 1$ (*despojada de sus raices reales* 1 *y* — 1, *si las tiene*) *y la* $y + \frac{1}{y} = z$, *tiene todas sus raices reales.*

En efecto, sabemos (*Trig.* 116) que toda cantidad imaginaria tiene la forma $\alpha + \beta\sqrt{-1}$; luego si esta cantidad es uno de los valores imaginarios de y, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ será otro de sus valores imaginarios (54): luego

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})^n = \pm 1,$$

$$(\alpha - \beta\sqrt{-1})^n = \pm 1:$$

multiplicando ordenadamente estas dos igualdades, y observando que los signos se corresponden, resulta

$$(\alpha^2 + \beta^2)^n = 1;$$

y como $\alpha^2 + \beta^2$ es una cantidad real y positiva, resulta

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Esto supuesto, tenemos

$$z = \alpha + \beta\sqrt{-1} + \frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}} =$$

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} + \frac{\alpha-\beta\sqrt{-1}}{(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha-\beta\sqrt{-1})} =$$

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} + \frac{\alpha - \beta\sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2};$$

pero, segun acabamos de demostrar, es $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; luego $z = \alpha + \beta\sqrt{-1} + \alpha - \beta\sqrt{-1} = 2\alpha$, cantidad real.

Nota. Para la resolucion trigonométrica de las ecuaciones binomias puede verse el Complemento de nuestro tratado de trigonometría.

CAPÍTULO III.

Resolucion algébrica de las ecuaciones de tercero y cuarto grado.

INTRODUCCION.

103. Resolver *algébricamente* una ecuacion es hallar una fórmula que dé los valores de la incógnita en funcion de los coeficientes de la ecuacion.

Las ecuaciones de los cuatro primeros grados son las únicas que se pueden resolver algébricamente. Ya hemos visto en la álgebra elemental las fórmulas correspondientes á las ecuaciones de primero y segundo grado: actualmente nos proponemos hallar las fórmulas correspondientes á las ecuaciones de tercero y cuarto grado.

Artículo 1.°

37

Ecuaciones de tercer grado.

---

104. Toda ecuacion de tercer grado puede reducirse á la forma

$$x^3 + 3px + 2q = 0 \qquad [1].$$

Para resolverla, tratemos de hallar una ecuacion que tenga la forma de la ecuacion [1], y de la cual pueda deducirse el valor de la incógnita en funcion de los coeficientes.

Elevemos con este objeto al cubo los dos miembros de la

ecuacion

$$x = y + z,$$

siendo y, z dos indeterminadas, de las que dispondremos segun nos convenga, y tendremos

$$x^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3,$$

ó $$x^3 = 3yz\,(y + z) + y^3 + z^3;$$

ó $$x^3 - 3yzx - (y^3 + z^3) = 0 \qquad [2]:$$

esta ecuacion tiene la forma de la ecuacion [1], y en ella es

$$x = y + z.$$

Esto supuesto, identifiquemos las ecuaciones [1] y [2], para lo cual haremos

$$yz = -p,$$
$$y^3 + z^3 = -2q;$$

y si de estas dos ecuaciones podemos deducir el valor de y y el de z, su suma será el valor de la incógnita x.

Para resolver estas dos ecuaciones, elevemos al cubo la primera, y tendremos

$$y^3z^3 = -p^3.$$

Conocemos, pues, la suma y el producto de las cantidades y^3 y z^3, y por tanto estas cantidades son raices de la ecuacion

$$u^2 + 2qu - p^3 = 0,$$

que se llama la *reducida* de la ecuacion propuesta.

Como y^3 y z^3 entran simétricamente en las ecuaciones, es indiferente llamar y^3 al primer valor de u y z^3 al segundo, ó al contrario.

Por consiguiente $$y^3 = -q + \sqrt{q^2+p^3},$$
$$z^3 = -q - \sqrt{q^2+p^3},$$

de donde

$$y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2+p^3}},$$

$$z = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2+p^3}}.$$

La primera de estas dos cantidades radicales representa una cantidad cuya tercera potencia es $-q + \sqrt{q^2+p^3}$, y ya se sabe que hay tres cantidades diferentes que tienen esta propiedad (100, 2.ª). Nosotros entenderemos que esta cantidad radical representa el

valor principal de la raiz cúbica de $-q+\sqrt{q^2+p^3}$ (*Algebra elemental* 118, *Nota*, y *Comp.to de la Trig.* 113, *Nota*).

Si llamamos α á la espresion $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, raiz cúbica imaginaria de la unidad, será α^2 la otra raiz cúbica imaginaria $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, como es fácil comprobar; y por tanto los tres valores de y serán

$$y=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}},$$

$$y=\alpha\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}},$$

$$y=\alpha^2\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}};$$

os de z serán

$$z=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}},$$

$$z=\alpha\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}},$$

$$z=\alpha^2\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}.$$

Habiendo hallado los valores de y y los de z, su suma nos dará los valores de x: pero, si sumásemos cada uno de los valores de y con cada uno de los de z, resultarian nueve valores diferentes para x. Mas, si observamos que el producto de los dos valores de y y de z debe ser $-p$, todas aquellas combinaciones, que no satisfagan á esta condicion, deberán desecharse.

Multiplicando el primer valor de y por el primero de z, su producto es

$$\sqrt[3]{q^2-(q^2+p^3)}=-p;$$

luego

$$x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2+p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2+p^3}}.$$

Multiplicando el primer valor de y por el segundo de z, el producto es $-\alpha p$; luego dicha combinacion debe desecharse.

Igualmente se verá que las combinaciones del primer valor de y con el tercero de z, del segundo de y con el primero de z, del segundo de y con el segundo de z son malas.

Multiplicando el segundo de y por el tercero de z, el producto es $-\alpha^3 p = -p$, por ser $\alpha^3 = 1$; luego

$$x = \alpha \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2+p^3}} + \alpha^2 \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2+p^3}}.$$

Las combinaciones del tercer valor de y con el primero y tercero de z son malas; y es buena la del tercer valor de y con el segundo de z; luego

$$x = \alpha^2 \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2+p^3}} + \alpha \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2+p^3}}.$$

98

Discusion de las raices de la ecuacion de tercer grado.

105. Llamemos, para abreviar, t y t' á las cantidades radicales $\sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2+p^3}}$ y $\sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2+p^3}}$, pongamos en lugar de α y α^2 sus valores, y los tres valores de x serán:

$$x = t + t' \qquad [A].$$

$$x = \frac{t(-1+\sqrt{-3})}{2} + \frac{t'(-1-\sqrt{-3})}{2},$$

ó $$x = \frac{-t + t\sqrt{-3} - t' - t'\sqrt{-3}}{2},$$

ó $$x = -\frac{t+t'}{2} + \frac{t-t'}{2}\sqrt{-3} \qquad [B].$$

$$x = \frac{t(-1-\sqrt{-3})}{2} + \frac{t'(-1+\sqrt{-3})}{2},$$

ó $$x = \frac{-t - t\sqrt{-3} - t' + t'\sqrt{-3}}{2},$$

ó $$x = -\frac{t+t'}{2} - \frac{t-t'}{2}\sqrt{-3} \qquad [C].$$

Esto supuesto, pueden suceder tres casos:

1.° $q^2 + p^3 > 0$,
2.° $q^2 + p^3 = 0$,
3.° $q^2 + p^3 < 0$.

Primer caso. Si $q^2 + p^3 > 0$, los valores de t y t' son reales, y por tanto la ecuacion propuesta tiene una raiz real y dos imaginarias.

Segundo caso. Si $q^2 + p^3 = 0$, será $t = t'$; y por consiguiente los tres valores de x son:

$$x = \quad 2t = 2\sqrt[3]{-q},$$

$$x = -t = -\sqrt[3]{-q},$$

$$x = -t = -\sqrt[3]{-q};$$

es decir, que en este caso la ecuacion tiene sus tres raices reales, dos de ellas iguales, y por tanto (73, *Corol.* 1.°) la ecuacion tendrá sus tres raices conmensurables, si p y q son conmensurables.

Tercer caso. Sea $q^2 + p^3 < 0$, lo que exige que p sea negativa, y el valor absoluto de p^3 mayor que q^2. En este caso las tres raices estan complicadas de imaginarias; pero es fácil demostrar que las tres son reales.

En efecto, sea $q^2 + p^3 = -\delta^2$, y por consiguiente

$$t = \sqrt[3]{-q + \delta\sqrt{-1}},$$

$$t' = \sqrt[3]{-q - \delta\sqrt{-1}}.$$

Mas (*Trig.* 115, 4.°)

$$\sqrt[3]{-q + \delta\sqrt{-1}} = a + b\sqrt{-1},$$

y por consiguiente (*Trig.* 116, *Nota*)

$$\sqrt[3]{-q - \delta\sqrt{-1}} = a - b\sqrt{-1};$$

luego

$$t + t' = 2a,$$
$$t - t' = 2b\sqrt{-1};$$

luego, sustituyendo estos valores en las fórmulas [A], [B] y [C], tendremos

$$x = 2a,$$
$$x = -a + b\sqrt{-1}\sqrt{-3} = -a + b\sqrt{3},$$
$$x = -a - b\sqrt{-1}\sqrt{-3} = -a - b\sqrt{3},$$

cantidades reales.

Nota. En este caso, llamado caso *irreducible*, las fórmulas que hemos hallado, no son de utilidad inmediata para hallar los valores de la incógnita de una ecuacion particular, que se halle en dicho caso. Es menester entonces valerse de los métodos esplicados en la resolucion de las ecuaciones numéricas, ó bien, transformar por medio de la fórmula de Moivre dichas fórmulas en otras equivalentes, como lo veremos pronto.

Artículo 2.°

Ecuaciones de cuarto grado.

106. Toda ecuacion de cuarto grado puede ponerse bajo la forma

$$x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0 \qquad [1].$$

Para resolver esta ecuacion, procuremos hallar una ecuacion que tenga esta forma, y de la cual pueda deducirse el valor de la incógnita en funcion de los coeficientes.

Elevemos, con este objeto, al cuadrado la ecuacion

$$x = y + z + u,$$

y tendremos

$$x^2 = y^2 + z^2 + u^2 + 2(yz + yu + zu),$$

ó

$$x^2 - (y^2 + z^2 + u^2) = 2(yz + yu + zu).$$

Elevemos al cuadrado esta última ecuacion, y tendremos

$$x^4 - 2(y^2 + z^2 + u^2)x^2 + (y^2 + z^2 + u^2)^2 = 4(y^2z^2 + y^2u^2 + z^2u^2) + 8(y^2zu + yz^2u + yzu^2),$$

ó

$$\left.\begin{array}{l} x^4 - 2(y^2 + z^2 + u^2)x^2 - 8yzu.x + (y^2 + z^2 + u^2)^2 \\ \qquad\qquad - 4(y^2z^2 + y^2u^2 + z^2u^2) \end{array}\right\} = 0 \quad [2].$$

Esta ecuacion tiene la forma de la ecuacion [1], y en ella es

$$x = y + z + u.$$

Esto supuesto, identifiquemos las ecuaciones [1] y [2]; para lo cual, estableceremos las ecuaciones

$$y^2 + z^2 + u^2 = -2p,$$

$$yzu = -q,$$

$$(y^2 + z^2 + u^2)^2 - 4(y^2z^2 + y^2u^2 + z^2u^2) = 4r;$$

y si de estas ecuaciones podemos deducir los valores de y, z y u, su suma será el valor de x.

Para resolver estas tres ecuaciones, simplifico en primer lugar la tercera, poniendo en vez de $y^2 + z^2 + u^2$ su valor $-2p$; y entonces la tercera ecuacion será

$$y^2z^2 + y^2u^2 + z^2u^2 = p^2 - r.$$

Si ademas elevamos la segunda al cuadrado, tendremos

$$y^2z^2u^2 = q^2.$$

De modo que conocemos la suma de cantidades y^2, z^2 y u^2, la suma de sus productos binarios, y el producto de dichas cantidades; luego (36) y^2, z^2 y u^2 son las raices de la ecuacion

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - r)t - q^2 = 0,$$

que se llama la *reducida* de la ecuacion propuesta.

Sean t', t'', t''' las tres raices de esta ecuacion: tendremos

$$y^2 = t', \qquad z^2 = t'', \qquad u^2 = t''',$$

ó $$y = \pm\sqrt{t'},\ z = \pm\sqrt{t''},\ u = \pm\sqrt{t'''}.$$

Habiendo hallado los valores de y, z y u, su suma será el valor de x; pero si sumásemos de todos los modos posibles tres á tres los seis valores de y, z y u, resultarian para x ocho valores diferentes. Mas, si observamos que el producto yzu debe ser $-q$, esto es, que este producto debe ser de signo contrario al de q, veremos que, si q es positivo, dos de dichos valores serán positivos y el otro negativo, ó bien los tres han de ser negativos; y si q es negativo, en cuyo caso el producto yzu es positivo, los tres valores han de ser positivos ó dos negativos.

Luego, en el caso en que dos raices de la reducida sean imaginarias, la ecuacion de cuarto grado tiene dos raices reales y dos imaginarias.

CAPÍTULO IV.

Resolucion trigonométrica del caso irreducible de las ecuaciones de tercer grado.

108. La ecuacion de tercer grado

$$x^3 + 3px + 2q = 0$$

se halla en el caso irreducible, siempre que p sea negativo, y $q^2 + p^3 < 0$. La ecuacion de tercer grado en el caso irreducible tiene, pues, la forma

$$x^3 - 3px + 2q = 0,$$

siendo q cantidad positiva ó negativa, y

$$q^2 - p^3 < 0.$$

El valor de t (105) es en este caso

$$t = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

Ahora bien,

$$-q + \sqrt{q^2 - p^3} = -q + \sqrt{p^3 - q^2}\,\sqrt{-1}$$

ó bien (*Trig.* 114)

$$-q + \sqrt{q^2 - p^3} = \sqrt{q^2 + p^3 - q^2}\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi),$$

ó $$-q + \sqrt{q^2 - p^3} = \sqrt{p^3}\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi),$$

siendo φ un ángulo cuyo coseno es $\dfrac{-q}{\sqrt{p^3}}$.

Por consiguiente (*Trig.* 113, 4.°)

$$t = \sqrt[3]{\sqrt{p^3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{3}\right),$$

ó $$t = \sqrt{p}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{3}\right).$$

Tenemos (*Trig.* 118)

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3},$$

$$\alpha^2 = \cos\frac{2\pi}{3} - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}.$$

Luego

$$t\alpha = \sqrt{p}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{3}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right),$$

ó $t\alpha = \sqrt{p}\left(\cos\frac{2\pi+\varphi}{3} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi+\varphi}{3}\right)$ (*Trig.* 113, 1.°),

$$t\alpha^2 = \sqrt{p}\left(\cos\left(-\frac{\varphi}{3}\right) - \sqrt{-1}\,\text{sen}\left(-\frac{\varphi}{3}\right)\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3} - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right);$$

ó $$t\alpha^2 = \sqrt{p}\left(\cos\frac{2\pi-\varphi}{3} - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi-\varphi}{3}\right).$$

Del mismo modo hallaremos

$$t' = \sqrt{p}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$t'\alpha = \sqrt{p}\left(\cos\frac{2\pi-\varphi}{3} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi-\varphi}{3}\right),$$

$$t'\alpha^2 = \sqrt{p}\left(\cos\frac{2\pi+\varphi}{3} - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi+\varphi}{3}\right).$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas

$$x = t + t',$$
$$x = t\alpha + t'\alpha^2,$$
$$x = t\alpha^2 + t'\alpha,$$

tendremos

$$x = \sqrt{p}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{3}\right) + \sqrt{p}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$x = 2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi}{3}. \qquad [R].$$

$$x=\sqrt{p}\left(\cos\frac{2\pi+\varphi}{3}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{2\pi+\varphi}{3}\right)+\sqrt{p}\left(\cos\frac{2\pi+\varphi}{3}-\sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{2\pi+\varphi}{2}\right),$$

ó

$$x = 2\sqrt{p}\cos\frac{2\pi+\varphi}{3} \qquad [S].$$

$$x=\sqrt{p}\left(\cos\frac{2\pi-\varphi}{3}-\sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{2\pi-\varphi}{3}\right)+\sqrt{p}\left(\cos\frac{2\pi-\varphi}{3}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{2\pi-\varphi}{3}\right),$$

ó

$$x = 2\sqrt{p}\cos\frac{2\pi-\varphi}{3} \qquad [T].$$

Hallando, pues, el ángulo φ por la fórmula

$$\cos\varphi = \frac{-q}{\sqrt{p^3}},$$

las fórmulas $[R]$, $[S]$ y $[T]$ nos darán los valores de las tres incógnitas.

Ejemplo. Sea la ecuacion

$$x^3 - 15x + 20 = 0.$$

Comparándola con la

$$x^3 - 3px + 2q = 0,$$

es $p = 5$, $q = 10$; $q^2 - p^3 = -25$, y por tanto esta ecuacion se halla en el caso irreducible.

Tenemos

$$\cos\varphi = \frac{-10.10^{10}}{\sqrt{125}},$$

restableciendo el radio de las tablas.

Como, segun esta espresion, $\varphi > 90^\circ$, haremos

$$\varphi = 90 + \varphi' \ (Trig.\ 30),$$

y por consiguiente

$$\text{sen}\,\varphi' = \frac{10.10^{10}}{\sqrt{125}}.$$

Cálculo para hallar φ':

$$\log 10 = 1$$
$$\log 10^{10} = 10$$
$$11$$
$$\log \sqrt{125} = 1{,}0484550$$
$$\log \operatorname{sen} \varphi' = 9{,}9515450,$$

Por consiguiente $\varphi' = 63^\circ 26' \ 6''$,

y $\varphi = 153^\circ 26' \ 6''$,

luego $2\pi + \varphi = 513^\circ 26' \ 6''$,

$2\pi - \varphi = 206^\circ 33' 54''$.

$$\frac{\varphi}{3} = 51^\circ \ 8' 42'',$$

$$\frac{2\pi + \varphi}{3} = 171^\circ \ 8' 42'',$$

$$\frac{2\pi - \varphi}{3} = 68^\circ 51' 18''.$$

Luego

$$x = 2\sqrt{5} \cdot \frac{\cos(51^\circ 8' 42''}{10^{10}},$$

restableciendo el radio de las tablas.

$$-x = 2\sqrt{5} \cdot \frac{\cos(8^\circ 51' 18'')}{10^{10}},$$

$$x = 2\sqrt{5} \cdot \frac{\cos(68^\circ 51' 18'')}{10^{10}}.$$

Cálculo para el primer valor de x.

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log \sqrt{5} = 0{,}3494850$$
$$\log \cos(51^\circ 8' 42'') = 9{,}7974901$$
$$209$$
$$\log x = 0{,}4480260, \quad x = 2{,}8056.$$

Cálculo para la segunda raiz.

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log \sqrt{5} = 0{,}3494850$$
$$\log \cos (8^\circ 51' 18'') = 9{,}9447886$$
$$6$$

$$\log(-x) = 0{,}6453042, \; -x = 4{,}4188, \; x = -4{,}418$$

Cálculo para la tercera raiz.

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log \sqrt{5} = 0{,}3494850$$
$$\log \cos (68^\circ 51' 18'') = 9{,}5571707$$
$$109$$

$$\log x = 0{,}2076996, \; x = 1{,}6132.$$

LIBRO QUINTO.

SÉRIES.

CAPÍTULO I.

Convergencia y divergencia de las séries.

109 Se llama *série* un polinomio de infinitos términos, los cuales siguen una ley constante en su formacion.

Una série se llama *convergente* cuando el valor absoluto de la suma de los infinitos términos que siguen á los n primeros, puede acercarse á cero en menos de cualquiera cantidad dada, siendo n tan grande como se quiera; ó lo que es igual, cuando el error, por defecto ó por esceso, que se comete tomando por valor de la série sus n primeros términos, puede ser menor que cualquiera cantidad asignable, siendo n suficientemente grande.

Las séries que no satisfacen á esta definicion, se llaman *divergentes*, y no son de ninguna utilidad, porque no dan valores aproximados de su valor total.

110. *Una progresion geométrica decreciente y continuada al infinito es una série convergente, y una progresion geométrica creciente continuada al infinito, es una série divergente.*

1.° Sea la progresion geométrica decreciente continuada al infinito

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \ldots\ldots \qquad [A].$$

La suma de todos los términos que siguen á los n primeros es

$$aq^n + aq^{n+1} + aq^{n+2} + \ldots\ldots$$

Siendo esta última série una progresion geométrica decreciente continuada al infinito, la suma de sus infinitos términos es (*Alg. elem.* 242) $\dfrac{aq^n}{1-q}$.

Como suponemos que $q < 1$, creciendo n indefinidamente dicha suma ó error puede acercarse á cero cuanto se quiera; luego la série [A] es convergente.

2.° Si $q > 1$, el término general aq^n va creciendo indefinidamente, y por tanto la suma de los términos siguientes á los n primeros va creciendo sin fin, y por lo mismo la progresion [A], en que $q > 1$, es una série divergente.

111. Segun la definicion, es condicion necesaria, para que una série sea convergente, que la suma de los términos siguientes á los n primeros, siendo n indefinidamente grande, se acerque á cero cuanto se quiera, y que por lo tanto, y con mayor razon, cada uno de los términos de dicha suma se acerque tambien á cero en menos de cualquiera cantidad conocida: esta condicion necesaria no es, sin embargo, suficiente, para poder asegurar que una série es convergente; porque verificándose ella, quizá falte la condicion principal de que la suma de los infinitos términos siguientes á los n primeros se acerque indefinidamente á cero, creciendo n.

Tomemos, para hacerlo ver, la série

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\ldots,$$

cuyos términos van disminuyendo, y pueden llegar, siendo suficientemente lejanos del primero, á valer menos que cualquiera cantidad dada.

El término que en esta série ocupa el lugar n es $\frac{1}{n}$, y la suma de todos los términos siguientes es

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots\ldots \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \ldots\ldots + \text{etc.}$$

La suma de los n primeros de estos quebrados, que es

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n}$$

es mayor que $\frac{1}{2}$; pues si todos estos quebrados fuesen iguales al $\frac{1}{2n}$, la suma seria $n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$; pero como todos los quebrados anteriores al $\frac{1}{2n}$ son mayores que él, se infiere que dicha suma es mayor que $\frac{1}{2}$.

Queda pues demostrado que la suma de los términos siguientes á los n primeros de la série propuesta no es menor que cualquiera cantidad dada, creciendo n indefinidamente, y que por *lo tanto* dicha série es divergente.

112. *Si los términos de una série contados hácia la derecha desde el que ocupa un lugar cualquiera* m, *forman una série convergente, la série total será tambien convergente.*

En efecto, si llamamos E al error que se comete en la série parcial tomando por valor de la misma sus n primeros términos, E será el error de la série total tomando por su valor la suma de los $m+n$ primeros términos: mas, por ser la série parcial convergente, es E menor que cualquiera cantidad dada; luego la série total es tambien convergente.

113. *Una série cuyos términos no tienen ninguna permanencia de signo, y van disminuyendo continua é indefinidamente, es convergente.*

En efecto, sea la série

$$t_1 - t_2 + t_3 - t_4 + \ldots - t_n + t_{n+1} - t_{n+2} + t_{n+3} - t_{n+4} + \ldots$$

en la cual los términos van cambiando de signo constantemente, y disminuyen continua é indefinidamente.

Supongamos en primer lugar que n es par.

La suma de los términos siguientes á los n primeros, ó el error, es la cantidad positiva

$$(t_{n+1} - t_{n+2}) + (t_{n+3} - t_{n+4}) + (t_{n+5} - t_{n+6}) + \ldots =$$

$$t_{n+1} - (t_{n+2} - t_{n+3}) - (t_{n+4} - t_{n+5}) - \ldots,$$

la cual es menor que t_{n+1}, porque es la diferencia entre t_{n+1} y la suma de una infinidad de cantidades positivas

$$(t_{n+2} - t_{n+3}), (t_{n+4} - t_{n+5}), \text{ etc.}$$

Como, siendo n suficientemente grande, el término t_{n+1} siguiente á los n primeros, puede llegar, segun la suposicion, á ser menor que cualquiera cantidad dada, se infiere que el error que se comete tomando por valor de la série los n primeros términos, puede llegar á ser (con mayor razon) menor que cualquiera cantidad asignable, y que por tanto la série es convergente.

Si n es impar, la série será

$$t_1 - t_2 + t_3 - t_4 \ldots - t_{n+1} + t_{n+2} - t_{n+3} + \ldots,$$

y por consiguiente el error por esceso es

$$t_{n+1} - t_{n+2} + t_{n+3} - t_{n+4} + \ldots,$$

y se demuestra como en el caso anterior, que este error es menor que el primer término t_{n+1}, es decir, menor que cualquiera cantidad dada.

Nota. Hemos demostrado que en esta série el error que se

comete tomando por valor de la série un cierto número de términos, es menor que el término siguiente.

Asi, la série $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$

es convergente, pues continuando esta série suficientemente, es claro que se llegará á términos menores que cualquier cantidad dada; y si por ejemplo tomamos por valor de la série los 100 primeros términos, el error será menor que $\frac{1}{101}$.

114. *Una série cuyos términos son respectivamente menores que los de una progresion geométrica decreciente y continuada al infinito, es convergente.*

Pues por ser la progresion una série convergente, la suma de los términos siguientes á los n primeros puede acercarse á 0 cuanto se quiera; luego con mayor razon la suma de los términos siguientes á los n primeros en la série de que se trata, será menor que cualquiera cantidad dada; luego dicha série es convergente.

Nota. Para hallar el límite del error (es decir, un número mayor que el error, pero tan pequeño como se pueda hallar) que se comete tomando por valor de una série de esta clase los n primeros términos, no hay mas que hallar el error, que puede hallarse exactamente, de la suma de los n primeros términos de la progresion geométrica, y este error será mayor que el de la série.

Asi, la série

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a(a+1)},\ \frac{1}{a(a+1)(a+2)},\ \frac{1}{a(a+1)(a+2)(a+3)}\ldots\ldots,$$

en que a es entero y positivo, es convergente; pues sus términos, prescindiendo del primero, son respectivamente menores que los de la progresion geométrica

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a^3},\ \frac{1}{a^4},\ldots\ldots$$

El término que en esta série ocupa el lugar n es $\frac{1}{a^n}$, y la suma de los siguientes, á saber

$$\frac{1}{a^{n+1}}+\frac{1}{a^{n+2}}+\frac{1}{a^{n+3}}+\ldots=\frac{\frac{1}{a^{n+1}}}{1-\frac{1}{a}}=\frac{1}{a^n(a-1)}$$

será el límite del error de la série propuesta.

115. *Si los términos de una série, contados desde uno cualquiera á la derecha, son todos positivos, y la razon de cada uno de estos al inmediato anterior es menor que un número* $1 < 1$, *dicha série es convergente; y si la razon de cada término al inmediato anterior es mayor que* 1, *la série es divergente.*

1.° Sea la série

$$t_0, t_1, t_2, t_3 \ldots\ldots,$$

y sea t_{n+1} el término desde el cual en adelante todos son positivos, y la razon de cada uno al inmediato anterior es menor que $l < 1$: tendremos

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} < l, \frac{t_{n+2}}{t_{n+1}} < l, \frac{t_{n+3}}{t_{n+2}} < l \ldots\ldots,$$

ó $t_{n+1} < t_n \times l, t_{n+2} < l \times t_{n+1}, t_{n+3} < l \times t_{n+2} \ldots\ldots;$

y con mayor razon

$$t_{n+1} < t_n \times l, t_{n+2} < t_n \times l^2, t_{n+3} < t_n \times l^3 \ldots\ldots:$$

vemos que los términos

$$t_{n+1}, t_{n+2}, t_{n+3} \ldots\ldots$$

son respectivamente menores que los de la progresion geométrica decreciente y continuada al infinito

$$t_n \times l, t_n \times l^2, t_n \times l^3 \ldots\ldots;$$

luego (114) la série

$$t_{n+1}, t_{n+2}, t_{n+3} \ldots\ldots,$$

es convergente; luego (112) la série propuesta tambien lo es.

2.° Supongamos ahora que la razon de cada término al anterior sea mayor que 1: en este caso desde que los términos de la série empiezan á tener esta propiedad, dichos términos van creciendo, y por consiguiente la série es divergente (111).

CAPÍTULO II.

Desarrollo de las funciones simples de una variable en série.

---

116. *Dos séries idénticas de una variable tienen iguales los coeficientes de las mismas potencias de la variable.*

Supongamos que se tenga la identidad

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots,$$

en la que los coeficientes $a, b, c, d, \ldots, A, B, C, D, \ldots$ son independientes de x; digo que

$$a = A, b = B, c = C, d = D, \text{ etc.}$$

En efecto, dando en esta identidad á x un valor cualquiera, los resultados serán iguales; dando pues á x el valor 0, resulta $a = A$; y por consiguiente

$$bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots,$$

ó partiendo por x,

$$b + cx + dx^2 + \ldots = B + Cx + Dx^2 + \ldots,$$

y haciendo $x = 0$, resulta $b = B$; y asi de los demas.

Este teorema equivale al siguiente:

Si una série es igual á 0, *todos los coeficientes de las diferentes potencias de la variable serán iguales á* 0.

Pues si

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots = 0,$$

y damos á x el valor 0, los resultados de los dos miembros de esta identidad serán iguales; luego $A = 0$. Dividiendo por x los dos miembros de la identidad que queda, y haciendo en seguida $x = 0$, resulta $B = 0$; y asi sucesivamente.

117. Regla general para desarrollar una funcion simple de una variable en série de potencias de la variable con esponentes enteros y positivos.

Iguálese la funcion á la série de coeficientes incógnitos, ó *indeterminados*, $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots\ldots$; hállense las derivadas de los dos miembros de la identidad establecida, y resultará una nueva identidad, puesto que dos cantidades idénticas, tienen una misma derivada. Con esta segunda identidad ejecútese la misma operacion que con la primera, é igualmente con las demas identidades que vayan resultando.

Dando en seguida en todas estas identidades á la variable el valor 0, se hallarán fácilmente los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C,...

Apliquemos esta regla á varios ejemplos.

118. *Desenvolver la funcion* $(1 + x)^m$ *en série, siendo* m *un número cualquiera*; ó sea *demostracion general de la fórmula del binomio.*

Haremos, segun la regla,

$$(1 + x)^m = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots\ldots,$$

y derivando los dos miembros de esta identidad, resultará la nueva identidad,

$$m(1 + x)^{m-1} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \ldots\ldots$$

Volviendo á derivar esta identidad y las demas que vayan resultando, tendremos

$$m(m-1)(1+x)^{m-2}=2C+2.3Dx+3.4Ex^2+4.5Fx^3+\ldots,$$
$$m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}=2.3D+2.3.4Ex+3.4.5Fx^2+\ldots,$$
$$m(m-1)(m-2)(m-3)(1+x)^{m-4}=2.3.4E+2.3.4.5Fx+\ldots$$

etc.

Dando ahora en todas estas identidades á x el valor 0, resultarán

$$A=1,\ B=m,\ C=\frac{m(m-1)}{2},\ D=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3},$$
$$E=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4},\ \text{etc.};$$

luego

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^3$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}x^4+\text{etc.}\qquad [A].$$

De esta fórmula, poniendo en vez de x $\frac{a}{x}$, se deducirá esta otra:

$$(x+a)^m=x^m+mx^{m-1}a+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}a^2+$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}a^3+\ldots\ldots\qquad [B];$$

y así queda demostrada la fórmula de Newton en todos los casos.

Si m es entero y positivo, el segundo miembro de la fórmula $[A]$ tiene $m+1$ términos, y el último de estos es x^m; el segundo miembro de la fórmula $[B]$ tiene tambien $m+1$ términos, siendo el último término a^m.

El segundo miembro de cualquiera de estas dos fórmulas, de la $[A]$ por ejemplo, es una série en los casos en que m no es entero y positivo: veamos cuándo será convergente esta série.

El término que ocupa el lugar n en el segundo miembro de la fórmula $[A]$ es

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}x^n,$$

y el siguiente es

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1.2\ldots\ldots n(n+1)}x^{n+1}.$$

la razon de este término al inmediato anterior es

$$\frac{m-n}{n+1}x = \frac{\frac{m}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}x = \frac{1-\frac{m}{n}}{1+\frac{1}{n}} \times -x.$$

Por grande que sea el valor absoluto de m, existe en la série un término bastante lejano del primero para que los valores absolutos de las fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{1}{n}$ sean menores que cualquiera cantidad; luego desde aquel término en adelante la razon $\frac{1-\frac{m}{n}}{1+\frac{1}{n}} \times -x$ (menor que x en valor absoluto) se diferenciará de $-x$ en tan poco como se quiera.

Por consiguiente, si x es positivo y menor que 1, la razon $\frac{1-\frac{m}{n}}{1+\frac{1}{n}} \times -x$ llegará á ser negativa y menor en valor absoluto que 1; luego todos los términos siguientes en la série irán disminuyendo indefinidamente en valor absoluto, y cambiarán alternativamente de signo; luego (113) la série será convergente.

Si x es negativo y menor que 1 en valor absoluto, $-x$ será un número positivo menor que 1: la razon $\frac{1-\frac{m}{n}}{1+\frac{1}{n}} \times -x$ será positiva desde que $n > m$; y por consiguiente desde el término en que esto se verifique en adelante, todos los términos tendrán el mismo signo; y pues la cantidad $\frac{1-\frac{m}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ es desde que $n > m$ menor que 1, la razon $\frac{1-\frac{m}{n}}{1+\frac{1}{n}} \times -x$ será menor que una can-

tidad menor que 1; luego (115) la série será convergente.

Si $x > 1$ en valor absoluto, llegará el caso de que los términos de la série irán creciendo constantemente, y por tanto la série será divergente: es decir, que en tal caso el desarrollo de $(1+x)^m$ no da el valor aproximado de esta espresion.

119. *Desenvolver en série la funcion esponencial* a^x, *siendo* a *un número positivo.*

Haremos

$$a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots;$$

y derivando, tendremos (17, 16 y 23)

$$a^x la = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \ldots;$$

y continuando la derivacion,

$$a^x(la)^2 = 2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + 4.5Fx^3 + \ldots,$$

$$a^x(la)^3 = 2.3D + 2.3.4Ex + 3.4.5Fx^2 + \ldots,$$

$$a^x(la)^4 = 2.3.4E + 2.3.4.5.Fx + \ldots.$$

etc.

Haciendo ahora $x = 0$ en todas estas igualdades, resultan

$$A = 1,\ B = la,\ C = \frac{(la)^2}{2},\ D = \frac{(la)^3}{2.3},\ E = \frac{(la)^4}{2.3.4},\ \text{etc};$$

luego

$$a^x = 1 + xla + \frac{x^2}{2}(la)^2 + \frac{x^3}{2.3}(la)^3 + \frac{x^4}{2.3.4}(la)^4 + \text{etc.} \quad [A].$$

Si $a = e$, será $la = le = 1$, y por tanto

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Probemos que la série $[A]$ es convergente.

En esta série el término que ocupa el lugar n es $\frac{(xla)^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}$, y el que ocupa el lugar $n+1$ es $\frac{(xla)^n}{2.3\ldots(n-1)n}$: la razon de este al anterior es $\frac{xla}{n}$, cantidad que puede aproximarse á ce

Haciendo $y = 1$, será

$$l2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots\right).$$

Haciendo $y = 2$,

$$l3 = l2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \ldots\right).$$

Conociendo el logaritmo de 2, tendremos

$$l4 = 2l2.$$

Haciendo $y = 4$, será

$$l5 = l4 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5 + \ldots\right),$$

$$l6 = l2 + l3.$$

Haciendo $y = 6$, será

$$l7 = l6 + 2\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{13}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{13}\right)^5 + \ldots\right).$$

Los logaritmos de los números compuestos 8, 9 y 10 se hallarán fácilmente sumando los logaritmos de sus factores.

Haciendo $y = 10$, se hallará el logaritmo de 11.

Se continuará del mismo modo tan lejos como se quiera, hallando por medio de la série [F] los logaritmos de los números primos, y los de los compuestos por la adicion de los logaritmos de sus factores.

122. Nos falta ahora averiguar cuántos términos deben calcularse de la série del paréntesis de la fórmula [F] para obtener el logaritmo neperiano de un número en menos de una parte alícuota cualquiera de la unidad.

Hallemos con este objeto el límite del error que resulta tomando por valor de la série los n primeros términos.

El término que en el paréntesis ocupa el lugar n, es

$$\frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{(2y+1)^{2n-1}},$$

y por consiguiente el error (al que llamaremos E) que se comete tomando por valor de este paréntesis sus n primeros términos, ó sea al error de la série es

$$E = 2\left(\frac{1}{2n+1} \times \frac{1}{(2y+1)^{2n+1}} + \frac{1}{2n+3} \times \frac{1}{(2y+1)^{2n+3}} + \frac{1}{2n+5} \times \frac{1}{(2y+1)^{2n+5}} + \ldots\right).$$

Luego

$$E < \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{(2y+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2y+1)^{2n+3}} + \frac{1}{(2y+1)^{2n+5}} + \ldots\right);$$

y como la suma de los términos de la progresion geométrica interior á este paréntesis es

$$\frac{\dfrac{1}{(2y+1)^{2n+1}}}{1 - \dfrac{1}{(2y+1)^2}} = \frac{\dfrac{1}{(2y+1)^{2n-1}}}{4y^2+4y} = \frac{1}{4(y^2+y)(2y+1)^{2n-1}},$$

será

$$E < \frac{1}{(4n+2)(y^2+y)(2y+1)^{2n-1}};$$

y pues n es por lo menos 1, será con mayor razon, reemplazando $4n+2$ por el número 6,

$$E < \frac{1}{6(y^2+y)(2y+1)^{2n-1}}:$$

luego si el error final ha de ser menor que $\frac{1}{q}$, tendremos que hallar el valor entero y positivo de n que satisfaga á la igualdad ó desigualdad

$$6(y^2+y)(2y+1)^{2n-1} \overset{=}{>} q;$$

ó bien á la igualdad ó desigualdad

$$(2y+1)^{2n-1} \overset{=}{>} \frac{q}{6(y^2+y)}.$$

Este valor entero y positivo de n se hallará fácilmente formando las potencias sucesivas de $2y+1$.

Figurémonos, por ejemplo, que se trate de hallar el logaritmo neperiano de 2, con 10 cifras decimales de aproximacion.

En este caso $y=1$, y como el error final ha de ser menor, que

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10.^{10}} = \frac{1}{20000\,000000},$$

tendremos que hallar el valor entero y positivo de n, que satisfaga á la igualdad ó desigualdad

$$3^{2n-1} \overset{=}{>} \frac{20000\,000000}{6.2}, \text{ ó } 3^{2n-1} \overset{=}{>} 1666\,666666.$$

Formando las potencias sucesivas de 3, se hallará que 3^{21} es mayor que este número; luego $2n - 1 = 21$, ó $n = 11$; es decir que si calculamos once términos de la série del paréntesis con once cifras decimales, para evitar en el resultado final la acumulacion de errores, y despreciamos la undécima, ó añadimos una unidad á la décima si la undécima es 5 ó mayor que 5, tendremos el logaritmo neperiano de 2 con diez cifras decimales exactas.

Ejemplo 2.° Hallar el logaritmo neperiano de 29 con diez cifras decimales, suponiendo conocido el de 28.

En este caso $y = 28$; y para determinar el número de términos que deben tomarse en la série, tenemos que hallar el valor entero y positivo de n que satisfaga á la igualdad ó desigualdad

$$57^{2n-1} \underset{>}{=} \frac{20000\,000000}{6 \times 812},$$

ó

$$57^{2n-1} \underset{>}{=} 4105090.$$

Efectuando las potencias sucesivas de 57, se halla que la cuarta potencia es mayor que 4105090; luego

$$2n - 1 = 4,$$

y por consiguiente

$$n = 3;$$

luego calculando tres términos de la série con 11 cifras decimales, se tendrá el logaritmo neperiano de 29 en menos de media unidad del décimo órden decimal.

123. Construidas unas tablas de logaritmos neperianos, se construirán otras, cuya base sea diferente de la base neperiana e, multiplicando los logaritmos neperianos por el módulo del nuevo sistema.

El módulo del sistema ordinario con respecto al neperiano es $\frac{1}{l10}$.

Para multiplicar los logaritmos neperianos por el módulo, conviene reducir este á decimales, y ejecutar en seguida las multiplicaciones, como se esplicó en (*Arit Complem.* 2 *y* 10).

124 *Desenvolver sen* x *y cos* x *en série de potencias del arco* x.

Haremos

$$\operatorname{sen} x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots,$$

y ahora podriamos hallar los valores de estos coeficientes por la regla general (117); pero se abreviará este cálculo teniendo en

cuenta una propiedad del seno, á saber, que su desarrollo en série no puede contener término independiente del arco, ni potencias de esponente par del arco; pues de otro modo, cambiando el signo del arco, no cambiará el signo del seno, como tiene que suceder en virtud de la igualdad

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x.$$

Haremos pues

$$\operatorname{sen} x = Bx + Dx^3 + Fx^5 + \ldots;$$

y aplicando ahora la derivacion sucesiva, tendremos

$$\begin{aligned}
\cos x &= B + 3Dx^2 + 5Fx^4 + \ldots, \\
-\operatorname{sen} x &= 2.3Dx + 4.5Fx^3 + \ldots, \\
-\cos x &= 2.3D + 3.4.5Fx^2 + \ldots, \\
+\operatorname{sen} x &= 2.3.4.5.Fx + \ldots, \\
\cos x &= 2.3.4.5.F + \ldots, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Dando ahora á x el valor 0, resultan

$$B = 1,\ D = -\frac{1}{2.3},\ F = \frac{1}{2.3.4.5},\ \text{etc};$$

luego

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots;$$

y como tenemos en la segunda identida el valor de $\cos x$ en série, será

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \ldots,$$

que es fácil hallar directamente.

Estas fórmulas sirven para construir las tablas de senos y cosenos.

125. *Desenvolver arc tg* x *en série de potencias de* x.

Tampoco arc tg x puede tener en su desarrollo término constante ni términos en que el esponente del arco x sea par, pues el arco cuya tangente es $-x$ se diferencia en el signo del arco cuya tangente es x; y no seria asi, si arc tg x contuviera término independiente de x, ó algun término en que x tuviese esponente par.

Hagamos pues

$$\operatorname{arc\,tg} x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \ldots:$$

por consiguiente (22)

$$\frac{1}{1+x^2} = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \ldots$$

Ahora, para no meternos en la derivacion sucesiva de $\frac{1}{1+x^2}$, que es bastante pesada, seguiremos el método indicado en la nota del número (120), es decir, que desarrollaremos en série la fracion $\frac{1}{1+x^2}$, que es la suma de los términos de la progresion geométrica

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots.$$

cuya razon es $-x^2$.

Tenemos pues la identidad

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 \ldots,$$

por consiguiente

$$A = 1,\ B = -\frac{1}{3},\ C = \frac{1}{5},\ D = -\frac{1}{7},\ \text{etc.};$$

luego $\quad \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.} \qquad [S].$

Esta série es convergente mientras que el valor absoluto de la tangente positiva ó negativa x sea igual á 1 ó menor que 1; pues que en tales casos los términos de la série disminuyen indefinidamente y sus signos van alternando (113).

126. Esta série es muy adecuada para hallar la razon π de la circunferencia al diámetro.

Observemos que si el radio es 1, π es el valor de la media circunferencia, y por consiguiente $\frac{\pi}{4}$ el de la octava parte de la circunferencia, ó sea del arco de 45°; luego $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Por consiguiente, segun la série, tendremos

$$\operatorname{arc\,tg} 1 \text{ ó } \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

série convergente (113), pero que exigiria muchos términos para obtener una aproximacion mediana.

El modo de deducir con poco trabajo el valor aproximado de π por medio de la série [S], consiste en dividir el arco $\frac{\pi}{4}$ en

dos ó mas arcos cuyas tangentes sean dadas arbitrariamente, todas menos una: esta se determinará fácilmente, en atencion á que su arco respectivo es la diferencia entre $\frac{\pi}{4}$ y la suma de los arcos cuyas tangentes se dan. Conociendo las tangentes de todos estos arcos, se hallarán por medio de la série [S] los valores de los arcos, y su suma será el valor de $\frac{\pi}{4}$.

Hagamos, por ejemplo,

$$\frac{\pi}{4} = a + x,$$

siendo a el arco cuya tangente nos daremos: será

$$x = \frac{\pi}{4} - a,$$

y por consiguiente

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a}.$$

Asi, si

$$\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}, \text{ será } \operatorname{tg} x = \frac{1}{3}.$$

Por consiguiente

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \ldots,$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \ldots$$

La suma de estos dos arcos será el valor de $\frac{\pi}{4}$.

Si hubiésemos hecho $\operatorname{tg} a = \frac{1}{10}$, hubiera resultado $\operatorname{tg} x = \frac{9}{11}$, y por consiguiente

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{10} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^5 - \ldots.$$

$$+ \frac{9}{11} - \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{9}{11}\right)^5 - \ldots.$$

se quiera, creciendo n suficientemente, ó lo que es igual, que tiene por límite 0; luego (115) esta série es convergente, cualquiera que sea el valor real de x.

120. *Desenvolver en série la funcion logarítmica* $l(1+x)$.

Haremos

$$l(1+x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots,$$

y derivando, será (18 *Corol.* y 21)

$$\frac{1}{1+x} \text{ ó } (1+x)^{-1} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \ldots$$

$$-(1+x)^{-2} = 2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + 4.5Fx^3 + \ldots$$

$$2(1+x)^{-3} = 2.3D + 2.3.4Ex + 3.4.5Fx^2 + \ldots$$

$$-2.3(1+x)^{-4} = 2.3.4E + 2.3.4.5Fx + \ldots$$

etc.

Haciendo ahora $x = 0$, resultan

$$A = 0,\ B = 1,\ C = -\tfrac{1}{2},\ D = \tfrac{1}{3},\ E = -\tfrac{1}{4}, \text{ etc. } (a);$$

y por consiguiente

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \ [C],$$

série convergente siempre que $x < 1$ (113).

Para hallar otra série mas rápidamente convergente, muda-

(*a*) Si hubiésemos desarrollado la espresion $\frac{1}{1+x}$ en série, lo que es fácil, haciéndose cargo de que, siendo $x < 1$, esta cantidad es la suma de los infinitos términos de la progresion geométrica decreciente y continuada al infinito

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots,$$

resultado que tambien puede obtenerse por la division ó desarrollando $(1+x)^{-1}$ por la fórmula del binomio, se hubieran hallado fácilmente los valores de los coeficientes indeterminados; porque se hubiesen encontrado dos séries idénticas de una misma variable (116).

Lo mismo puede decirse de cualquier otro caso en que es posible espresar directamente en série de coeficientes conocidos, ó en serie de los coeficientes incógnitos propuestos, la derivada de la funcion que se trata de desarrollar, lo cual sucede tambien en los ejemplos primeros.

remos en esta el signo de x, y tendremos

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \quad [D].$$

Los términos de esta série son menores en valor absoluto que los de la progresion geométrica

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

la cual es una série convergente cuando $x < 1$; luego la série $[D]$ es convergente (114) cuando $x < 1$, y por tanto representa á la espresion $l(1-x)$.

Esto supuesto, restemos ordenadamente las igualdades $[C]$ y $[D]$, y tendremos

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right) \quad [E].$$

Puesto que $\frac{1+x}{1-x} > 1$, hagamos

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1}{y},$$

de donde $$x = \frac{1}{2y+1},$$

y sustituyendo estos valores en la série $[E]$, tendremos, observando que

$$l\left(1 + \frac{1}{y}\right) = l(1+y) - ly,$$

$$l(1+y) = ly + 2\left(\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2y+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2y+1}\right)^7 + \ldots\right) \quad [F].$$

Esta série es convergente, pues los términos del paréntesis son menores que los de la progresion geométrica decreciente y continuada al infinito

$$\frac{1}{2y+1} + \left(\frac{1}{2y+1}\right)^3 + \left(\frac{1}{2y+1}\right)^5 + \left(\frac{1}{2y+1}\right)^7 + \ldots$$

121. Por medio de la série $[F]$ se calculan fácil y prontamente unas tablas de logaritmos neperianos.

LIBRO SESTO.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES TRASCENDENTES.—MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE.—DESCOMPOSICION DE LAS FRACCIONES RACIONALES EN FRACCIONES SIMPLES.

CAPÍTULO I.

Resolucion de las ecuaciones trascendentes.

127. Teorema de Taylor para toda funcion algébrica ó trascendente de una variable, que puede desarrollarse en série de potencias de la variable con esponentes enteros y positivos.

Sea $\varphi(x)$ la funcion, y $Mx^m + Nx^n + Px^p + \ldots$ la série en que se desarrolla dicha funcion, siendo los esponentes de x enteros, positivos y crecientes, pudiendo ser 0 el menor m de todos ellos.

Dando á x el incremento h, será

$$\varphi(x+h) = M(x+h)^m + N(x+h)^n + P(x+h)^p + \ldots$$

Desenvolviendo los términos del segundo miembro por la fórmula del binomio, se hallará del mismo modo que en (27) la identidad

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\,\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\,\varphi''(x) + \frac{h^3}{2.3}\,\varphi'''(x) + \text{etc.},$$

constando este segundo miembro de infinitos términos.

128. Sea $\varphi(x)=0$ una ecuacion trascendente, siendo $\varphi(x)$ desarrollable en série de potencias de x con esponentes enteros y positivos. Esta funcion, asi como cada una de sus derivadas sucesivas, recibe un valor real y finito por cada valor real y finito dado á la variable x. Demos pues á esta valores reales y finitos, positivos ó negativos, y hallemos los correspondientes de $\varphi(x)$; tomemos en seguida desde un punto O de una recta indefinida $x'x$, hácia la derecha, las partes Om, On, Op, Oq, Or,... cuyos valores sean iguales á los positivos de x, y hácia la izquierda, las partes Os, Ot,...

cuyos valores sean iguales á los absolutos de los negativos dados á x; levantemos por los puntos $m, n, q, t,...$ hácia arriba las perpendiculares $mM, nN, qQ, tT,..$ á la recta $x'x$, y cuyos valores sean iguales á los valores positivos de $\varphi(x)$, y las perpendiculares $pP, rR, sS,...$ hácia abajo, y cuyos valores sean iguales á los absolutos de los negativos de $\varphi(x)$: unamos finalmente por medio de una curva contínua los estremos $T, S, M, N, P, Q, R,...$ de estas perpendiculares, los cuales pueden construirse tan próximos entre sí como se quieran, y tendremos una curva $TSMNPQR$, que llamaremos *correspondiente* á $\varphi(x)$, curva que se estenderá sin interrupcion alguna é indefinidamente á derecha é izquierda, y que no podrá retroceder en su curso, porque la funcion $\varphi(x)$, siendo por suposicion desarrollable en série de potencias de x con esponentes enteros y positivos, no tiene mas que un solo valor por cada valor de la variable x.

Observemos ahora que los valores absolutos de $\varphi(x)$ son las distancias de los puntos de la curva á la recta $x'x$; luego en los puntos de interseccion de estas dos líneas los valores de $\varphi(x)$ serán guales á cero; luego los valores de las distancias de estos puntos al punto O, precedidos del signo —, si dichos puntos están á la izquierda del punto O, son los valores de x que anulan á $\varphi(x)$, ó lo que es igual, son las raices de la ecuacion $\varphi(x)=0$. Por consiguiente, despues que esté construida la curva correspondiente á la funcion $\varphi(x)$, midiendo las distancias de los puntos de interseccion de esta curva con la recta $x'x$ al punto fijo O, y tomando estos valores negativamente, si los puntos de interseccion están á la izquierda de este punto O, se tendrán (aunque no pasará de una apróximacion grosera) los valores de x que anulan á $\varphi(x)$.

129. Por medio de la curva correspondiente á la funcion $\varphi(x)$ se ve claramente que *si dos números* a *y* b *sustituidos en vez de* x *en esta funcion dan resultados* $\varphi(a)$ *y* $\varphi(b)$ *de signo contrario, la ecuacion* $\varphi(x) = 0$ *tiene un número impar de raices reales comprendidas entre* a *y* b; *y que si los resultados* $\varphi(a)$ *y* $\varphi(b)$ *tienen el mismo signo, la ecuacion tendrá un número par de raices reales comprendidas entre* a *y* b, *ó no tendrá ninguna raiz comprendida entre estos dos números.*

130. Esto supuesto, para resolver la ecuacion $\varphi(x)=0$, sustitúyanse en vez de x varios números, hasta que encontremos dos a y b (suponemos que $a < b$) que den resultados $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$ de signo contrario: la ecuacion tendrá, segun el teorema precedente, un número impar de raices reales mayores que a y menores que b. No tendrá la ecuacion mas que una sola raiz comprendida entre a y b, si la derivada $\varphi'(x)$ es constantemente positiva ó constantemente negativa desde $x = a$ hasta $x = b$; pues en el

primer caso sabemos (26) que la funcion $\varphi(x)$ es constantemente creciente desde $\varphi(a)$ hasta $\varphi(b)$, y pasará por consiguiente por cero de negativa á positiva; y no pasará por cero mas que una sola vez desde $x = a$ hasta $x = b$, por ser constantemente creciente entre estos límites. En el segundo caso, es decir cuando $\varphi'(x)$ es constantemente negativa desde $\varphi'(a)$ hasta $\varphi'(b)$, la funcion irá disminuyendo desde $\varphi(a)$ hasta $\varphi(b)$, pasará por consiguiente por cero de positiva á negativa, pero solo una vez entre dichos límites.

Si la derivada $\varphi'(x)$ varía de signo entre los límites $\varphi'(a)$ y $\varphi'(b)$, no podremos asegurar que la ecuacion tenga una sola raiz comprendida entre a y b, porque, si bien este caso es posible, tambien puede suceder que la ecuacion tenga tres, cinco, etc. raices mayores que a y menores que b. En tal caso se sustituirá en $\varphi(x)$ un número c intermedio entre a y b, y si entonces $\varphi(c)$ es de signo contrario á $\varphi(a)$ ó á $\varphi(b)$ (supongo que es de signo contrario á $\varphi(a)$), y $\varphi'(x)$ es constantemente positiva ó negativa desde $\varphi'(a)$ á $\varphi'(c)$, no habrá mas que una raiz mayor que a y menor que c. Si $\varphi'(x)$ cambia de signo desde $\varphi'(a)$ á $\varphi'(c)$, se sustituirá en $\varphi(x)$ otro número intermedio entre a y c; y continuando del mismo modo, se hallarán dos números que no comprenderán mas que una sola raiz de la ecuacion (*a*).

131. Cuando se hayan obtenido dos números entre los cuales se halle comprendida una sola raiz de la ecuacion, podrá continuarse su apróximacion por el método de las sustituciones intermedias; pero si los dos números que comprenden la raiz, se diferencian poco, será preferible, en general, continuar la apróximacion por el método de Newton; cuya esplicacion vamos á dar, aunque se diferencia poco de la que dimos en (92).

Sea la ecuacion $\varphi(x) = 0$, a el valor aproximado de x, y la cantidad que falta á la a para ser raiz de la ecuacion: tendremos

$$\varphi(a + y) = 0,$$

ó desarrollando esta espresion por el teorema de Taylor,

$$\varphi(a) + \varphi'(a).y + \frac{\varphi''(a)}{2} y^2 + \frac{\varphi'''(a)}{2.3} y^3 + \ldots = 0.$$

Supongamos que y sea una cantidad bastante pequeña, para que las potencias y^2, y^3,... puedan despreciarse sin error notable:

(*a*) El modo de separar las raices, que acabamos de esplicar, puede aplicarse igualmente á las ecuaciones algébricas, y evitar por lo tanto el tener que recurrir al método de separacion de las raices inconmensurables esplicado en (87).

tendremos aproximadamente

$$\varphi(a) + \varphi'(a) \times y = 0,$$

de donde

$$y = -\frac{\varphi(a)}{\varphi'(a)},$$

es decir que *si se ha hallado un valor aproximado de la raiz de una ecuacion, la cantidad que falta á dicho valor para ser otro mas aproximado de la misma raiz, es la cantidad* $-\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}$, *reemplazando en esta espresion* x *por dicho primer valor aproximado.*

Segun esta regla, despues que se haya añadido al primer valor aproximado a de x la cantidad $-\frac{\varphi(a)}{\varphi'(a)}$, tendremos un nuevo valor b mas aproximado de x, y reemplazando en la espresion $-\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}$ la variable x por el nuevo valor aproximado b, tendremos $-\frac{\varphi(b)}{\varphi'(b)}$, cantidad que añadida á b nos dará otro nuevo valor c de x mas aproximado que el anterior; y asi sucesivamente.

Ejemplo 1.° *Dados en un triángulo rectilíneo dos lados* a *y* b, *y la diferencia* B — C *de los dos ángulos* B *y* C, *uno opuesto á uno de los dos lados conocidos, y el otro comprendido entre estos dos lados, resolver el triángulo.*

Tenemos, llamando d á la diferencia conocida entre los ángulos B y C, las dos ecuaciones

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}(B + C)}{\operatorname{sen} B},$$

$$B - C = d,$$

con las dos incógnitas B y C.

Eliminando entre ellos la C, resulta la ecuacion

$$\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(2B - d)} = \frac{b}{a},$$

la cual desarrollada nos daria una ecuacion de cuarto grado de coeficientes irracionales, y por lo tanto es preferible resolverla sin transformarla.

Reemplacemos, para mayor claridad, la incógnita B por x, y tendremos la ecuacion trascendente

$$\varphi(x) = b \operatorname{sen}(2x - d) - a \operatorname{sen} x = 0.$$

Derivando $\varphi(x)$, es

$$\varphi'(x) = 2b \cos(2x - d) - a \cos x;$$

luego la espresion $-\dfrac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}$ de las correcciones por el método de Newton será actualmente

$$-\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} = \frac{b \operatorname{sen}(2x - d) - a \operatorname{sen} x}{a \cos x - 2b \cos(2x - d)}.$$

Asi pues, habiendo hallado dos valores bastante próximos, y entre los cuales se halle una sola raiz de la ecuacion propuesta, se podrá continuar la aproximacion por medio de esta espresion.

Caso particular.

$$a = 420^m,\ b = 531^m,\ B - C = d = 23^\circ\ 24'\ 30''.$$

La ecuacion que tenemos que resolver es

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(2x - 23^\circ\ 24'\ 30'')} - \frac{531}{420} = 0,$$

ó $$420 \operatorname{sen} x - 531 \operatorname{sen}(2x - 23^\circ\ 24'\ 30'') = 0.$$

Para hallar los dos números que comprendan al valor de x, observaremos en primer lugar que el arco $2x - 23^\circ\ 24'\ 30''$ ó $x + (x - 23^\circ\ 24'\ 30'')$ es mayor que x, puesto que x es mayor que $23^\circ\ 24'\ 30''$; luego el primer quebrado $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(2x - 23^\circ\ 24'\ 30'')}$ es menor que el segundo $\dfrac{531}{420}$, mientras el arco $2x - 23^\circ\ 24'\ 30''$ no pase de 90°. Si este arco $2x - 23^\circ\ 24'\ 30''$ pasa de 90°, y va creciendo, su seno llegará á valer menos que sen x, y quizá entonces será el resultado positivo.

El valor de x, cuando $2x - 23^\circ = 90^\circ$ (despreciamos los minutos y segundos, porque su consideracion es inútil por el momento) es de unos 56°.

Hagamos pues $x = 60^\circ$, y el resultado será

$$\frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 97^\circ} - \frac{531}{420},$$

ó $$\frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\cos 7^\circ} - \frac{531}{420}.$$

El logaritmo del quebrado $\dfrac{531}{420}$ es 0,10184, y el de $\dfrac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\cos 7^\circ}$ es menor; luego el resultado es negativo.

Hagamos $x = 70^\circ$, y veremos del mismo modo que el resultado es tambien negativo.

Hagamos $x = 80^\circ$, y veremos que el resultado es positivo.

Por consiguiente el valor de x está comprendido entre 70° y 80°.

Para demostrar que entre estos dos números no hay ninguna otra raiz de la ecuacion, hallaremos la derivada del primer miembro de la ecuacion propuesta, que puede escribirse asi:

$$420 \operatorname{sen} x - 531 \operatorname{sen} (2x - 23^\circ\ 24'\ 30'') = 0.$$

Dicha derivada es

$$420 \cos x - 2 \times 531 \cos (2x - 23^\circ\ 24'\ 30'');$$

y reemplazando x por su valor $70^\circ + h \left({h > 0, \atop < 10^\circ} \right)$, será esta derivada

$$420 \cos (70^\circ + h) - 2 \times 531 \cos (117^\circ - h),$$

ó $$420 \cos (70^\circ + h) + 2 \times 531 \operatorname{sen} (27^\circ - h),$$

cantidad constantemente positiva desde $h = 0$ hasta $h = 10^\circ$; luego el primer miembro de la ecuacion es creciente desde $x = 70^\circ$ hasta $x = 80^\circ$, y por tanto no hay mas que un solo valor de x entre estos dos números.

Esto supuesto, sustituyamos números intermedios entre 70° y 80°.

$x = 75^\circ$ da un resultado negativo,
$x = 77^\circ$ positivo,
$x = 76^\circ$ negativo,

luego x está comprendida entre 76° y 77°.

Ahora podríamos continuar la aproximacion por el método de las sustituciones intermedias; mas ya que conocemos el valor de la incógnita con menor error que un grado, apelaremos, para continuar la aproximacion, al método de Newton.

Tenemos en este caso

$$\varphi(x) = 420 \operatorname{sen} x - 531 \operatorname{sen} (2x - 23^\circ\ 24'\ 30''),$$
$$\varphi'(x) = 420 \cos x - 1062 \cos (2x - 23^\circ\ 24'\ 30'');$$

luego la espresion de las correcciones sucesivas es actualmente

$$y = \frac{531 \operatorname{sen} (2x - 23^\circ\ 24'\ 30'') - 420 \operatorname{sen} x}{420 \cos x - 1062 \cos (2x - 23^\circ\ 24'\ 30'')}.$$

Poniendo en esta espresion en vez de x el valor aproximado 76°,

Caso particular.

$$B = 59^\circ\ 50',\ b + c = s = 120^\circ\ 17'\ 50''.$$

La ecuacion que tenemos que resolver es

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{sen}(120^\circ\ 17'\ 50'' - x)\operatorname{tg}(59^\circ\ 50') = 0,$$

ó bien

$$\operatorname{tg} x - \cos(30^\circ\ 17'\ 50'' - x)\operatorname{tg}(59^\circ\ 50') = 0.$$

Si en esta ecuacion damos á x el valor $30^\circ\ 17'\ 50''$, el resultado $\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 59^\circ$ es negativo.

Si $x = 80^\circ$, el resultado es positivo,
$x = 40$, negativo,
$x = 60^\circ$, positivo,
$x = 50^\circ$, negativo.

Luego el valor de x está comprendido entre 50° y 60°.

Veamos ahora si la ecuacion no tiene mas que una sola raiz mayor que 50° y menor que 60°.

La derivada del primer miembro de la ecuacion es

$$1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{sen}(30^\circ\ 17'\ 50'' - x) \times -1 \times \operatorname{tg}(59^\circ\ 50'),$$

ó

$$1 + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}(30^\circ\ 17'\ 50'' - x) \times \operatorname{tg}(59^\circ\ 50').$$

Si x es mayor que 50° y menor que 60°, será $x = 50^\circ + h$, siendo h un árco positivo, pero menor que 10°: el valor de la derivada será en tal caso

$$1 + \operatorname{tg}^2(50^\circ + h) + \operatorname{sen}(19^\circ\ 42'\ 50'' + h) \times \operatorname{tg}(59^\circ\ 50'),$$

cantidad positiva: luego la funcion crece desde $x = 50^\circ$ hasta $x = 60^\circ$, y por consiguiente la ecuacion no tiene entre 50° y 60° mas que una sola raiz.

$x = 55^\circ$ da un resultado negativo,
$x = 57^\circ$ positivo,
$x = 56^\circ$ negativo.

Luego el valor de x está comprendido entre 56° y 57°.

Tendremos ahora para las correcciones sucesivas

$$y = \frac{\operatorname{sen}(120^\circ\ 17'\ 50'' - x)\operatorname{tg}(59^\circ\ 50') - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x + \cos(120^\circ\ 17'\ 50'' - x)\operatorname{tg}(59^\circ\ 50')};$$

y poniendo en esta espresion el valor aproximado 56° en vez de x, será

$$y = \frac{\operatorname{sen}(64^\circ\ 17'\ 50'')\operatorname{tg}(59^\circ\ 50') - \operatorname{tg} 56^\circ}{1 + \operatorname{tg}^2 56^\circ + \cos(64^\circ\ 17'\ 50'')\operatorname{tg}(59^\circ\ 50')} = 59'.$$

Luego el segundo valor de x mas aproximado que el primero es $56^\circ 59'$.

Por consiguiente la segunda correccion es

$$y = \frac{\operatorname{sen}(63^\circ 18' 50'')\operatorname{tg}(59^\circ 50') - \operatorname{tg}(56^\circ 59')}{1 + \operatorname{tg}^2(56^\circ 59') + \cos(63^\circ 18' 50'')\operatorname{tg}(56^\circ 50')} = -1' 23'',5;$$

luego

$$x = 56^\circ 57' 36'',5;$$

valor aproximado hasta las décimas de segundo; lo que puede comprobarse sustituyendo este número en lugar de x, y el mismo aumentado ó disminuido en 0,1 de segundo.

Ejemplo 3.° *Hallar un arco cuyo valor en partes del radio unidad sea igual al de su coseno.*

Sea x el arco referido al radio 1: tendremos la ecuacion

$$\cos x - x = 0.$$

Si hacemos $x = 0$, el resultado es positivo, puesto que $\cos 0 = 1$.

Si hacemos $x = 1$, $\cos x$ será menor que 1; luego el resultado es negativo; es decir que el arco está comprendido entre 0 y 57°.

$x = 30^\circ$	da un resultado positivo,
$x = 45^\circ$	negativo,
$x = 40^\circ$	positivo (*a*),
$x = 43^\circ$	negativo,
$x = 42^\circ$	positivo.

(*a*) Para hallar generalmente el signo del valor de $\cos x - x$ cuando en lugar de x ponemos un cierto número de grados, se hallará el valor de x en partes del radio, observando que si es α el número de grados del arco x, como $1^\circ = \frac{1}{57,29378} = 0,01741\,329$, será $\alpha^\circ = 0,01741\,329 \times \alpha$. Se tomarán en seguida los logaritmos de $\cos x$ y de $0,01741\,329 \times \alpha$, y se verá cuál de los logaritmos es el mayor: si $\log \cos x$ es mayor que $\log x$, será $\cos x > x$; y al contrario. Para facilitar este cálculo, pondremos la tabla siguiente de los valores de los grados, minutos y segundos en partes del radio 1.

$1^\circ = 0,01745\ 32925$	$1' = 0,00029\ 08882$	$1'' = 0,00000\ 48481$
$2^\circ = 0,03490\ 65850$	$2' = 0,00058\ 17764$	$2'' = 0,00000\ 96962$
$3^\circ = 0,05235\ 98776$	$3' = 0,00087\ 26646$	$3'' = 0,00001\ 45444$
$4^\circ = 0,06981\ 31701$	$4' = 0,00116\ 35528$	$4'' = 0,00001\ 93925$
$5^\circ = 0,08726\ 64626$	$5' = 0,00145\ 44410$	$5'' = 0,00002\ 42407$
$6^\circ = 0,10471\ 97551$	$6' = 0,00174\ 53293$	$6'' = 0,00002\ 90888$
$7^\circ = 0,12217\ 30476$	$7' = 0,00203\ 62174$	$7'' = 0,00003\ 39369$
$8^\circ = 0,13962\ 63402$	$8' = 0,00232\ 71057$	$8'' = 0,00003\ 87851$
$9^\circ = 0,15707\ 96327$	$9' = 0,00261\ 79938$	$9'' = 0,00004\ 36332$

Ahora, la fórmula de las correcciones es

$$y = \frac{\text{sen } 2x - x}{1 - 2\cos 2x};$$

ó bien, puesto que

$$1 - 2\cos 2x = 2(\tfrac{1}{2} - \cos 2x) = 2(\cos 60^\circ - \cos 2x) =$$
$$4\,\text{sen}\,(x + 30^\circ)\,\text{sen}\,(x - 30^\circ),$$

será

$$y = \frac{\text{sen } 2x - x}{4\,\text{sen}\,(x + 30^\circ)\,\text{sen}\,(x - 30^\circ)}.$$

Poniendo ahora en vez de x su valor aproximado 54°, y volviendo en seguida á hacer otra correccion, se hallará

$$x = 54^\circ\ 18'\ 8'',9.$$

5.° *¿Cuál es el arco cuyo sector tiene de área la mitad de la del triángulo formado por el radio, la tangente y la secante?*

Sea 1 el radio, y x el valor del arco en partes del radio: el área del sector es $\frac{x}{2}$, y la del triángulo $\frac{tgx}{2}$; luego la ecuacion del problema es

$$2x - tgx = 0.$$

Es fácil ver que el arco x está comprendido entre 60° y 70°; y como la derivada de $2x - tgx$ es $2 - \frac{1}{\cos^2 x}$, cantidad constantemente positiva, se infiere que entre 60° y 70° no hay mas que un solo valor de x.

Siguiendo el mismo órden que en los casos precedentes, se hallará sin dificultad que el valor de x en grados es

$$x = 66^\circ\ 46'\ 54'',2.$$

6.° *Hallar un valor de* x *mayor que* 0, *que satisfaga á la ecuacion*

$$e^x - e^{-x} - 5{,}284x = 0.$$

Antes de emprender la marcha ordinaria de la resolucion de esta ecuacion, conviene tener presentes los valores siguientes:

$$e = 2{,}71828\ 18284,$$
$$\log e = 0{,}43429\ 44819.$$

Esto supuesto, si hacemos

$$x = 0, \text{ el resultado es } 0,$$
$$x = 1, \qquad\qquad -,$$
$$x = 2, \qquad\qquad -,$$
$$x = 3, \qquad\qquad +.$$

Para hallar el signo de este último resultado, pues los anteriores se hallan sin dificultad, observaremos que

$$\log e^3 = 3 \log e = 1{,}3028835,$$

$$\log e^{-3} = \log \frac{1}{e^3} = \bar{2}{,}6971164;$$

$$e^3 = 20{,}086,$$

$$\frac{1}{e^3} = 0{,}080,$$

y por tanto se ve que el resultado es positivo.

El valor de x está pues comprendido entre 2 y 3. La ecuacion no tiene mas que una sola raiz mayor que 2, porque desde $x=2$ en adelante la derivada $e^x + e^{-x} - 5{,}284$ del primer miembro de la ecuacion es constantemente positiva.

Hallaremos este valor de x hasta las centésimas por el método de las sustituciones intermedias, y veremos que el valor de x está comprendido entre 2,64 y 2,65.

Ahora, la primera correccion por el método de Newton nos dará, sustituyendo en la fórmula actual de las correcciones

$$y = \frac{5{,}284x + e^{-x} - e^x}{e^x + e^{-x} - 5{,}284}$$

el valor 2,64 en vez de x,

$$y = \frac{5{,}284 \times 2{,}64 + e^{-2{,}64} - e^{2{,}64}}{e^{2{,}64} + e^{-2{,}64} - 5{,}284},$$

y efectuando, se halla

$$y = 0{,}0009;$$

y por consiguiente

$$x = 2{,}6409.$$

La segunda correccion es

$$y = \frac{5{,}284 \times 2{,}6409 + e^{-2{,}6409} - e^{2{,}6409}}{e^{2{,}6409} + e^{-2{,}6409} - 5{,}284}.$$

Calculando este quebrado con mucho cuidado, valiéndose de las tablas de Callet ó de Calbet, resulta

$$y = -0{,}00000\ 079;$$

y por consiguiente

$$x = 2{,}64089\ 921.$$

En la siguiente correccion resultarian 16 cifras decimales; etc.

CAPÍTULO II.

Máximos y mínimos de las funciones de una variable.

---

132. En el número (195) del álgebra elemental dimos la regla para determinar los valores máximos y mínimos de las funciones de una variable, que, igualadas á una letra, dieran ecuaciones de segundo grado con respecto á la variable. Como la cuestion de los máximos y mínimos es de las mas importantes, nos parece conveniente presentar aqui la teoría ordinaria de los máximos y mínimos de las funciones de una variable; suponiendo que las derivadas de las funciones no se harán infinitas por los valores de la variable correspondientes á los máximos ó mínimos, pues las funciones cuyas derivadas son infinitas por dichos valores de la variable, no se presentan en las aplicaciones de las matemáticas.

133. Si creciendo la variable de una funcion, crece la funcion y luego disminuye, el valor particular de la funcion, mayor que los valores inmediatos anteriores y posteriores, se llama un *máximo* de dicha funcion; y si creciendo la variable, disminuye la funcion y luego vuelve á crecer, el valor particular de la funcion, menor que los inmediatos anteriores y posteriores, se llama un *mínimo* de la funcion.

Segun esto, por la palabra *máximo* no debe entenderse, segun parece indicarlo su significado vulgar, el mayor de los valores de la funcion, sino un valor grande ó chico, mayor que los inmediatos anteriores y posteriores: igualmente por la palabra *mínimo* no debe entenderse el valor menor de la funcion, sino un valor chico ó grande, menor que los inmediatos anteriores y posteriores. Asi es que sucede muchas veces (Véase el ejemplo 3.° del número 195 del *Alg. elem.*) que un valor mínimo de una funcion es mayor que un valor máximo de la misma.

Sin embargo, cuando la funcion tiene un solo máximo sin mínimo, el máximo es el valor mayor de la funcion; y si tiene un solo valor mínimo sin tener máximo, el mínimo es el menor valor de la funcion.

Teorema. *Si* f(a) *es un valor máximo ó mínimo de la funcion* f(x), *será* f'(a) = 0.

En efecto, segun la definicion de la derivada, y atendiendo á que el incremento que se dé al valor a de la variable, puede ser positivo ó negativo, tenemos

$$\lim.\frac{f(a+h)-fa}{h}=f'(a),$$

$$\lim.\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=f'(a);$$

luego

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)+\omega,$$

$$\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=f'(a)+\omega',$$

siendo ω y ω' cantidades que disminuyen con h, y que desaparecen cuando $h=0$: por consiguiente los segundos miembros, siendo h bastante peqneña, tienen los mismos signos que $f'(a)$; luego si $f'(a)$ es positiva, será $f(a+h)>fa$ y $f(a-h)<f(a)$; luego $f(a)$ no es en tal caso máximo ni mínimo. Si $f'(a)$ es negativa, será $f(a+h)<f(a)$ y $f(a-h)>f(a)$; luego tampoco en este caso $f(a)$ es máximo ni mínimo. Luego, como $f'(a)$ no puede ser infinita en las funciones que nosotros consideramos, será $f'(a)=0$, conforme al enunciado del teorema.

El recíproco de este teorema no es siempre cierto: puede suceder que siendo $f'(a)$ cero, $f'(a-h)$ y $f'(a+h)$ sean del mismo signo, y que por tanto la funcion sea constantemente creciente ó decreciente desde $f(a-h)$ á $f(a+h)$, y que por lo mismo $f(a)$ no sea máximo ni mínimo. Luego para que $f(a)$ sea un máximo, es menester que $f'(a)=0$, y que además $f'(a-h)$ sea positiva y $f'(a+h)$ negativa, porque verificándose esto, la funcion pasa de creciente á decreciente; y para que $f(a)$ sea un mínimo, es menester que $f'(a)=0$, y que además $f'(a-h)$ sea negativa y $f'(a+h)$ positiva, porque en tal caso la funcion pasa de decreciente á creciente.

Luego *para hallar los valores de la variable, correspondientes á los valores máximos ó mínimos de una funcion* f(x), *se resolverá la ecuacion* f'(x) = 0; *y una raiz cualquiera* a *de esta ecuacion corresponderá á un máximo, si* f'(a — h) *es positiva y* f'(a + h) *negativa, siendo* h *tan pequeña como se quiera; y dicha raiz* a *corresponderá á un mínimo, si* f'(a — h) *es negativa y* f'(a + h) *positiva.*

Ejemplos. 1.° *¿Cuál es el mayor producto que se puede*

mar con todas las partes de magnitud arbitraria en que se divida un número dado?

Para resolver este problema, supondremos que el número dado sea a, y consideraremos en primer lugar el caso en que este número se divida en dos partes.

Sea x una de las partes, la otra será $a - x$, y el producto de las dos $x(a - x)$ ó $ax - x^2$.

Para hallar el valor de x correspondiente al valor máximo de este producto, igualaremos á 0 su derivada $a - 2x$. El valor de x que anula á esta derivada, es $\frac{a}{2}$. Para asegurarnos de que este valor corresponde al valor máximo de la funcion $x(a - x)$, sustituiremos en la derivada $a - 2x$ en vez de x un número menor que $\frac{a}{2}$, y es claro que el resultado es positivo; y sustituyendo un número mayor que $\frac{a}{2}$, el resultado es evidentemente negativo: la derivada pasa pues de positiva á negativa, y por tanto el valor $\frac{a}{2}$ de x es el correspondiente al máximo del producto. Siendo $\frac{a}{2}$ una de las dos partes del número a, la otra parte es tambien $\frac{a}{2}$; y el producto de las dos partes es $\frac{a^2}{4}$. Luego *el mayor producto que se puede formar con las dos partes de un número es el producto de sus dos mitades ó el cuadrado de su mitad.*

De este teorema se infiere este otro general: *si se divide un número en varias partes, el producto de todas será el mayor posible, cuando todas ellas sean iguales.*

Sea s el número, $a, b, c, d....l$ las partes en que se divide; de suerte que $a + b + c + d + ... + l = s$. El producto de estas partes es $a \times b \times c \times d \times .... \times l$. Supongamos que este producto tenga dos factores, a y b por ejemplo, desiguales: en vez de dividir el número s en las partes $a,b,c,d....l$, puede dividirse en las partes $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+b}{2}$, $c, d,...l$, pues la suma de estas partes es evidentemente igual á $a + b + c + d + ... + l$: el producto de las nuevas partes es $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \times c \times d \times .... \times l$, el cual *es mayor* que $a \times b \times c \times d \times ..... \times l$; porque, segun el teore-

ma particular, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab$, lo que por otra parte es evidente. Por consiguiente, si se divide un número dado en varias partes, y entre ellas hay dos desiguales, el producto de todas ellas no es el mayor posible: luego *para que el producto de todas las partes en que se divida un número, sea el mayor posible, es menester que todas ellas sean iguales.*

2.° *¿Cuál es el mayor rectángulo que puede inscribirse en un círculo?*

Sean x é y la base y altura de un rectángulo inscripto en un círculo: la área de este rectángulo será xy, cuyo valor máximo queremos hallar. Mas esta espresion contiene dos variables, y para transformarla en otra equivalente de una sola variable, tenemos en el triángulo rectángulo formado por la base, altura y diagonal del mismo, la relacion, llamando r al radio del circulo,

$$x^2 + y^2 = 4r^2,$$

de la cual resulta

$$y = \sqrt{4r^2 - x^2};$$

y por tanto la área del rectángulo inscripto es

$$x\sqrt{4r^2 - x^2} = (4r^2x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}.$$

La derivada de esta funcion es

$$\tfrac{1}{2}(4r^2x^2 - x^4)^{-\frac{1}{2}}(8r^2x - 4x^3) =$$

$$(4r^2x^2 - x^4)^{-\frac{1}{2}}(4r^2x - 2x^3).$$

Igualándola á 0, tendremos la ecuacion

$$2.\frac{2r^2x - x^3}{\sqrt{4r^2x^2 - x^4}} = 0,$$

ó

$$2r^2x - x^3 = 0,$$

de donde

$$x = 0,\ x = \pm\sqrt{2r^2}.$$

El valor 0 de x corresponde á un mínimo: pues sustituyendo en la derivada en lugar de x $0 - h$ y $0 + h$, los resultado son:

$$2.\frac{-2r^2h + h^3}{\sqrt{4r^2h^2 - h^4}} = 2h.\frac{-2r^2 + h^2}{\sqrt{4r^2h^2 - h^4}},$$

y

$$2h.\frac{2r^2 - h^2}{\sqrt{4r^2h^2 - h^4}}.$$

El primero es negativo y el segundo positivo, siendo h bastante pequeña; y por consiguiente, como la derivada pasa de negativa á positiva, el valor 0 de x corresponde á un mínimo de la funcion.

Luego *el menor rectángulo inscriptible en un círculo es aquel cuya base es* 0, *y su altura el diámetro.*

El valor $\sqrt{2r^2}$ de x corresponde á un máximo. Para demostrarlo, divido por x los dos términos de la derivada, y esta será

$$2 . \frac{2r^2 - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}},$$

y asi vemos claramente que si $x \overset{>0}{<} \sqrt{2r^2}$, el valor de la derivada es positivo, y que si $x \overset{>\sqrt{2r^2}}{<} 2r$, el valor de la misma es negativo: luego la derivada pasa de positiva á negativa, y por tanto el valor $\sqrt{2r^2}$ de x corresponde á un máximo de la funcion.

El valor $-\sqrt{2r^2}$ de x corresponde tambien á un máximo de la funcion, mas no corresponde á nuestra cuestion concreta.

Siendo $\sqrt{2r^2}$ el valor de x correspondiente al máximo que buscábamos, el valor respectivo de y es tambien $\sqrt{2r^2}$. Luego *el mayor rectángulo inscriptible en un círculo es el cuadrado inscripto.*

3.° *¿Cuál es el mayor cilindro que puede inscribirse en un cono recto?*

Sea a la altura del cono, r el radio de su base, x el radio de la base del cilindro é y la altura de este: el volúmen del cilindro será $\pi x^2 y$. Para eliminar de esta espresion la variable y, los triángulos semejantes que resultan cortando el cono por medio de un plano que pase por su eje, nos dan la proporcion

$$\frac{x}{r} = \frac{a - y}{a}, \quad y = \frac{a(r - x)}{r}:$$

luego el volúmen del cilindro inscripto en el cono es

$$\frac{\pi a x^2 (r - x)}{r} = \pi a x^2 - \frac{\pi a x^3}{r}.$$

La derivada de esta funcion es

$$2\pi a x - \frac{3\pi a}{r} x^2,$$

la cual, igualada á cero, nos da la ecuacion

$$2\pi ax - \frac{3\pi a}{r} x^2 = 0,$$

de donde resultan

$$x = 0,\ x = \frac{2}{3} r.$$

El valor 0 de x corresponde á un minimo, pues sustituyendo en la espresion de la derivada en vez de x $0 - h$ y $0 + h$, los valores de esta son

$$-2\pi ah - \frac{3\pi a}{r} h^2,$$

$$2\pi ah - \frac{3\pi a}{r} h^2 = h\left(2\pi a - \frac{3\pi a}{r} h\right).$$

El primero de estos valores es negativo, y el segundo positivo, siendo h bastante pequeña; luego, pues que la derivada pasa de negativa á positiva, el valor 0 de la variable corresponde á un minimo. Siendo $x = 0$, es $y = a$. Es decir que el menor cilindro inscriptible en un cono es aquel cuya base es 0 y cuya altura es la del cono.

El valor $\frac{2}{3} r$ de x corresponde á un máximo: pues sustituyendo en la derivada en vez de x $\frac{2}{3} r - h$, el valor de la misma es

$$2\pi a\left(\frac{2}{3} r - h\right) - \frac{3\pi a}{r}\left(\frac{2}{3} r - h\right)^2 =$$

$$2\pi a.\frac{2}{3} r - 2\pi ah - \frac{3\pi a}{r}.\left(\frac{2}{3} r\right)^2 + 4\pi ah - \frac{3\pi a}{r} h^2 =$$

$$2\pi ah - \frac{3\pi a}{r} h^2 = h\left(2\pi a - \frac{3\pi a}{r} h\right),$$

cantidad positiva, siendo h suficientemente pequeña.

Sustituyendo ahora $\frac{2}{3} r + h$ en vez de x, el valor de la derivada es $h\left(-2\pi a + \frac{3\pi a}{r} h\right)$, cantidad negativa, siendo h sufi-

cientemente pequeña. La derivada pasa, segun esto, desde $x=2r-h$ hasta $x=2r+h$, de positiva á negativa; luego el valor $\frac{2}{3}r$ de x corresponde á un máximo. El valor respectivo de y es $\frac{1}{3}r$. Luego *el mayor cilindro que puede inscribirse en un cono, es el cilindro cuya base tiene por radio los* $\frac{2}{3}$ *del radio de la base del cono, y por la altura el tercio de la del cono.*

4.° *Determinar la altura y el radio de la base de una medida cilíndrica, de las que se usan para medir líquidos en el comercio al por menor, que tenga la menor superficie, conteniendo un volúmen determinado.*

Sea v el volúmen que ha de contener dicha medida, x el radio de su base é y su altura: $2\pi xy$ será la área de la superficie lateral del cilindro, y πx^2 la de su base; luego $2\pi xy+\pi x^2$ será la área total de la medida cilíndrica. Para eliminar la variable y de esta espresion, tenemos la condicion de que el volúmen del cilindro es v, es decir

$$\pi x^2 y = v;$$

de donde

$$y = \frac{v}{\pi x^2};$$

luego la área de dicha medida es

$$\frac{2v}{x}+\pi x^2.$$

La derivada de esta funcion es $2\pi x - \frac{2v}{x^2}$; y por consiguiente

$$2\pi x - \frac{2v}{x^2} = 0.$$

El único valor real que nos da para x esta ecuacion, es

$$x = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}},$$

que corresponde á un máximo; pues si en el valor general de la

derivada ponemos en vez de x un número menor que $\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$, el primer término será menor que $2\pi\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$, y el segundo mayor que $\frac{2v}{\left(\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}\right)^2}$; luego el valor que toma la derivada sustituyendo en vez de x dicho número menor que $\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$, es menor que $2\pi\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}} - \frac{2v}{\left(\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}\right)^2}$; y como esta cantidad es 0, se infiere que sustituyendo en la espresion general de la derivada en vez de x un número menor que $\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$, el resultado es negativo. Del mismo modo se ve que sustituyendo en vez de x en la derivada un valor mayor que $\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$, el resultado es positivo. Segun esto, la derivada pasa de negativa á positiva desde

$$x = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}} - h \text{ hasta } x = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}} + h;$$

luego el valor $\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$ de x corresponde á un mínimo. El valor respectivo de y es

$$y = \frac{v}{\pi\sqrt[3]{\frac{v^2}{\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{v^3}{v^2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}},$$

cantidad igual al valor de x. Luego *la medida cilíndrica cuya altura sea igual al radio de la base, es la que con la menor superficie encierra un volúmen determinado.*

Nota. Puede proponerse este problema en estos otros términos: *hallar la altura y base de una medida cilíndrica que con una superficie dada contenga el mayor volúmen posible.*

Dejamos su resolucion en estos términos al cuidado del lector.

5.° *Determinar el radio de la base y el lado de un cono recto que con la menor superficie posible contenga un volúmen determinado.*

Sea v el volúmen que ha de tener el cono, x el radio de su base y z su lado: su área total será

$$\pi x z + \pi x^2.$$

Para eliminar de esta espresion la variable z, tenemos la ecuacion

$$v = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{z^2 - x^2},$$

de donde

$$z = \sqrt{\frac{9v^2 + \pi^2 x^6}{\pi^2 x^4}};$$

luego la área total del cono es

$$\pi x^2 + \pi x \sqrt{\frac{9v^2 + \pi^2 x^6}{\pi^2 x^4}} = \pi x^2 + \left(\frac{9v^2}{x^2} + \pi^2 x^4\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La derivada de esta funcion es

$$2\pi x + \tfrac{1}{2}\left(\frac{9v^2}{x^2} + \pi^2 x^4\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{-18v^2}{x^3} + 4\pi^2 x^3\right) =$$

$$2\pi x + \frac{4\pi^2 x^3 - \dfrac{18v^2}{x^3}}{2\sqrt{\dfrac{9v^2}{x^2} + \pi^2 x^4}} = 2\pi x + \frac{2\pi^2 x^6 - 9v^2}{x^3\sqrt{\dfrac{9v^2}{x^2} + \pi^2 x^4}} =$$

$$2\pi x + \frac{2\pi^2 x^6 - 9v^2}{\sqrt{9v^2 x^4 + \pi^2 x^{10}}}.$$

Luego la ecuacion que tenemos que resolver, es

$$2\pi x + \frac{2\pi^2 x^6 - 9v^2}{\sqrt{9v^2 x^4 + \pi^2 x^{10}}} = 0,$$

ó

$$4\pi^2 x^2 = \frac{81v^4 - 36v^2\pi^2 x^6 + 4\pi^4 x^{12}}{9v^2 x^4 + \pi^2 x^{10}}.$$

Quitando el denominador, y simplificando, resulta

$$8\pi^2 x^6 = 9v^2.$$

El único valor real y positivo que tiene x en esta ecuacion binomia, es

$$x = \sqrt[6]{\frac{9v^2}{8\pi^2}}.$$

Para asegurarnos de que este valor de x corresponde á un minimo de la espresion $\pi x^2 + \left(\frac{9v^2}{x^2} + \pi^2 x^4\right)^{\frac{1}{2}}$ de la área total del cono, observaremos que si en la espresion general de la derivada de esta funcion sustituimos primeramente en vez de x $\sqrt[6]{\frac{9v^2}{8\pi^2}}$, el resultado es 0; si sustituimos en la misma espresion en vez de x un número menor que $\sqrt[6]{\frac{9v^2}{8\pi^2}}$, el resultado será negativo, pues dicha espresion puede escribirse asi:

$$2\pi x + \frac{2\pi^2}{\sqrt{\frac{9v^2}{x^8} + \frac{\pi^2}{x^2}}} - \frac{9v^2}{\sqrt{9v^2x^4 + \pi^2x^{10}}},$$

y es evidente que disminuyendo x, disminuyen los dos primeros términos, es decir el minuendo de esta diferencia, y aumenta el sustraendo; luego, puesto que sustituyendo en vez de x la cantidad $\sqrt[6]{\frac{9v^2}{8\pi^2}}$, el resultado es 0, sustituyendo un número menor que $\sqrt[6]{\frac{9v^2}{8\pi^2}}$, el resultado será negativo. Se ve del mismo modo que si se sustituye en la espresion de la derivada en vez de x un número mayor que $\sqrt[6]{\frac{9v^2}{8\pi^2}}$, el resultado es positivo; luego dicho valor de x corresponde á un minimo de la espresion del área del cono.

Para hallar ahora el valor correspondiente del lado z del cono, sustituyo el valor $\sqrt[6]{\frac{9v^2}{8\pi^2}}$ de x en la espresion $\sqrt{\frac{9v^2 + \pi^2x^6}{\pi^2x^4}}$, y

tendré

$$z^2 = \frac{9v^2 + \frac{9v^2}{8}}{\pi^2 \sqrt[3]{\frac{81v^4}{64\pi^4}}} = \frac{\frac{81v^2}{8}}{\sqrt[3]{\frac{81v^4}{64\pi^4}}} = \frac{\frac{81v^2}{8}}{\frac{3}{4}\sqrt[3]{3\pi^2v^4}} = \frac{81v^2}{6\sqrt[3]{3\pi^2v^4}} =$$

$$\frac{27v}{2\sqrt[3]{3\pi^2v}} = \sqrt[3]{\frac{27^3v^3}{24\pi^2v}} = \sqrt[3]{\frac{9v^2.27^2}{8\pi^2}} = 9\sqrt[3]{\frac{9v^2}{8\pi^2}};$$

luego $z = 3\sqrt[6]{\frac{9v^2}{8\pi^2}}$, cantidad triple del valor de x.

Luego *el cono recto cuyo lado es triplo del radio de la base, es el que con la menor superficie tiene un volúmen dado.*

Nota. Puede proponerse este problema de este otro modo: *hallar el radio de la base y el lado de un cono recto que en una superficie dada contenga el mayor volúmen.*

Su resolucion en estos términos es mas fácil que en los precedentes.

CAPÍTULO III.

Descomposicion de las fracciones racionales en fracciones simples.

134. Entendemos por *fraccion racional* una fraccion cuyos dos términos son funciones enteras de una variable.

Si el numerador de la fraccion es de un grado igual ó mayor que el de su denominador, se efectuará la particion hasta que se llegue al residuo (*Alg. elem.* 46), y entonces la fraccion propuesta se compondrá de una parte entera (que podrá ser un número entero ó quebrado) y de una fraccion racional cuyo numerador es de menor grado que su denominador.

Podemos suponer que los dos términos de esta última fraccion no tienen ningun factor comun, pues si lo tuvieran, lo podríamos hallar (68), y suprimirlo en seguida.

Dada pues la fraccion racional $\frac{f(x)}{F(x)}$ cuyo numerador es de menor grado que su denominador, y cuyos dos términos no tienen ningun factor comun, nos proponemos descomponerla en

fracciones *simples*, es decir en fracciones de la forma $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$, siendo A constante y α un entero igual á 1 ó mayor que 1; ó bien en fracciones de la forma $\frac{Ax+B}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\alpha}$, siendo A y B constantes y α un entero igual ó mayor que 1.

135. Observemos en primer lugar que si $a, b, \ldots, l$ son las raices de la ecuacion $F(x)=0$, α, $\beta, \ldots, \lambda$ los números de veces que cada una entra en dicha ecuacion, será

$$F(x)=(x-a)^\alpha\,(x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda.$$

136. Teorema. *La fraccion* $\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda}$ *es idéntica á la suma* $\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\ldots\ldots+\frac{L}{(x-l)^\lambda}+$ $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\ldots(x-l)^{\lambda-1}}$, *siendo* A, B,..., L *constantes cuyos valores son* $A=\frac{f(a)}{(a-b)^\beta\ldots(a-l)^\lambda}$, $B=\frac{f(b)}{(b-a)^\alpha\ldots(b-l)^\lambda}, \ldots,$ $L=\frac{f(l)}{(l-a)^\alpha(l-b)^\beta\ldots}$.

En efecto, tenemos la igualdad evidente

$$\frac{fx}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\ldots+\frac{L}{(x-l)^\lambda}+$$
$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda}-\frac{A}{(x-a)^\alpha}-\frac{B}{(x-b)^\beta}-\ldots-\frac{L}{(x-l)^\lambda},$$

ó

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\ldots+\frac{L}{(x-l)^\lambda}+$$
$$\frac{f(x)-A(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda-B(x-a)^\alpha\ldots(x-l)^\lambda-L(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda}.$$

Si en el numerador (al que llamaremos, para abreviar, N)

de la última fraccion ponemos en vez de x el número a, dicho numerador se convierte en $f(a) - A(a-b)^{\beta}\ldots(a-l)^{\lambda}$, cantidad que será cero, cuando $A = \dfrac{f(a)}{(a-b)^{\beta}\ldots(a-l)^{\lambda}}$: reduciéndose entonces N á 0, será (34) divisible por $x - a$. Si en el numerador N sustituimos el número b en lugar de x, tomará el valor $f(b) - B(b-a)^{\alpha}\ldots(b-l)^{\lambda}$, cantidad que se reducirá á 0, cuando $B = \dfrac{f(b)}{(b-a)^{\alpha}\ldots(b-l)^{\lambda}}$; y por consiguiente entonces será N divisible pos $x - b$. Del mismo modo veremos que si en el numerador N ponemos en lugar de L la cantidad $\dfrac{f(l)}{(l-a)^{\alpha}(l-b)^{\beta}\ldots.}$, será N divisible por $x - l$. Tenemos pues que reemplazando en el numerador N las indeterminadas $A, B, \ldots, L$ por los valores respectivos $\dfrac{f(a)}{(a-b)^{\beta}\ldots.(a-l)^{\lambda}}$, $\dfrac{f(b)}{(b-a)^{\alpha}\ldots.(b-l)^{\lambda}}, \ldots, \dfrac{f(l)}{(l-a)^{\alpha}(l-b)^{\beta}\ldots.}$, será N divisible por $x-a, x-b, \ldots, x-l$, y por tanto (35) será divisible por el producto $(x-a)(x-b)\ldots.(x-l)$: luego simplificando dicha fraccion última, y llamando $f_1(x)$ al cociente de la division de N por $(x-a)(x-b)\ldots.(x-l)$, será

$$\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots.(x-l)^{\lambda}} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \ldots + \frac{L}{(x-l)^{\lambda}} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\ldots.(x-l)^{\lambda-1}},$$

siendo $A = \dfrac{f(a)}{(a-b)^{\beta}\ldots.(a-l)^{\lambda}}$, $B = \dfrac{f(b)}{(b-a)^{\alpha}\ldots.(b-l)^{\lambda}}, \ldots$ $L = \dfrac{f(l)}{(l-a)^{\alpha}(l-b)^{\beta}}$, conforme á la conclusion del teorema.

Nota. Si como lo hemos supuesto desde un principio, es $f(x)$ de menor grado que $(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots.(x-l)^{\lambda}$, será tambien

$f_1(x)$ de menor grado que $(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\ldots(x-l)^{\lambda-1}$: porque cada uno de los términos que siguen á $f(x)$ en el numerador N, es evidentemente de menor grado que $(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}$; luego dicho numerador N es de menor grado que este polinomio; luego habiendo dividido los dos términos del quebrado $\dfrac{N}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}}$ por $(x-a)(x-b)\ldots(x-l)$, los dos términos pierden igual número de unidades en su grado, y por tanto $f_1(x)$ es de menor grado que $(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\ldots(x-l)^{\lambda-1}$.

Corolario. En virtud de este teorema la nueva fraccion $\dfrac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\ldots(x-l)^{\lambda-1}}$ (que, advertimos de paso, es la diferencia entre la fraccion propuesta y la suma $\dfrac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\dfrac{B}{(x-b)^{\beta}}+\ldots+\dfrac{L}{(x-l)^{\lambda}}$) se descompondrá en la suma $\dfrac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dfrac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots\ldots+\dfrac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\dfrac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}(x-b)^{\beta-2}\ldots(x-l)^{\lambda-2}}$; esta última se descompondrá en $\dfrac{A_2}{(x-a)^{\alpha-3}}+\dfrac{B_2}{(x-b)^{\beta-3}}+\ldots+\dfrac{D_2}{(x-l)^{\lambda-3}}+\dfrac{f_3(x)}{(x-a)^{\alpha-3}(x-b)^{\beta-3}\ldots(x-l)^{\lambda-3}}$.

Continuando de este modo, si uno solo de los factores binomios tiene mayor esponente que los demás, es claro que llegaremos á una fraccion cuyo denominador será dicho factor binomio con el esponente 1, y como esta fraccion es simple, quedará completamente descompuesta la fraccion dada. Pero si dos ó mas de los mayores esponentes de los factores binomios del denominador de la fraccion dada son iguales, se llegará á una fraccion cuyo denominador será el producto de las primeras potencias de estos factores binomios. Admitamos, para fijar las ideas, que la última fraccion sea $\dfrac{\varphi(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$: esta se descompondrá,

segun el teorema, en la suma de fracciones simples $\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+\frac{C_{\gamma-1}}{x-c}$, reduciéndose á cero la fraccion complementaria: porque esta fraccion complementaria es

$$\frac{\varphi(x)-A_{\alpha-1}(x-b)(x-c)-B_{\beta-1}(x-a)(x-c)-C_{\gamma-1}(x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)x-c)},$$

y su numerador, que es un polinomio de segundo grado, se anula poniendo en vez de x a, b y c (a).

Vemos pues que la fraccion propuesta se descompone en la suma siguiente de fracciones simples:

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$
$$+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$
$$+$$
$$\vdots$$
$$+\frac{L}{(x-l)^{\lambda}}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}-\ldots\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{x-l}.$$

Nota. Observemos que siendo $A=\frac{fa}{(a-b)^{\beta}\ldots.(a-l)^{\lambda}}$, $B=\frac{f(b)}{(b-a)^{\alpha}\ldots.(b-l)^{\lambda}}$, ..., $L=\frac{f(l)}{(l-a)^{\alpha}(l-b)^{\beta}\ldots}$, y no teniendo, segun lo suponemos, la fraccion $\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}}$ factor alguno comun á sus dos términos, $f(a)$, $f(b)$,... $f(l)$ serán cantidades finitas diferentes de 0, como tambien los denominadores $(a-b)^{\beta}\ldots.(a-l)^{\lambda}$, $(b-a)^{\alpha}\ldots.(b-l)^{\lambda}$, $(l-a)^{\alpha}(l-b)^{\beta}\ldots$: por consiguiente los numeradores A, B,..., L son números finitos diferentes de 0.

No se puede asegurar lo mismo de los otros numera-

(a) Toda vez que un polinomio $Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+Kx+L$ se anule por $m+1$ valores de x, todos los coeficientes de sus diferentes términos serán iguales á cero: porque si A no fuese 0, solo existirian m valores de x que anularian á dicho polinomio; mas como por el supuesto existen $m+1$ valores que lo anulan, se infiere que $A=0$. Del mismo modo se demuestra que $B=0,\ldots,K=0$, y por consiguiente $L=0$.

dores A_1, B_1,...,L_1, pues que sus valores respectivos son $\frac{f_1(a)}{(a-b)^{\beta-1}....(a-l)^{\lambda-1}}$, $\frac{f_1(b)}{(b-a)^{\alpha-1}....(b-l)^{\lambda-1}}$,....., $\frac{f_1(l)}{(l-a)^{\alpha-1}(l-b)^{\beta-1}.....}$, y puede suceder que uno ó mas de los numeradores de estos quebrados, por ejemplo $f_1(a)$ sea 0, por que nada se opone á que $f_1(x)$ tenga el factor $x-a$. En tal caso, antes de descomponer la fraccion $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}....(x-l)^{\lambda-1}}$, se suprimirá el factor $x-a$ comun á sus dos términos; y no existirá en las fracciones simples la $\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}$. Lo mismo diremos de las fracciones $\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}$,...,$\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}$, que podrán no existir; como igualmente de las $\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}}$, $\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-2}}$,....., $\frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-2}}$; etc.

137. Teorema. *Una fraccion racional no admite mas que una sola descomposicion en fracciones simples.*

Sea $\frac{f(x)}{F(x)}$ la fraccion racional, a, b,.... las raices de la ecuacion $F(x)=0$, α, β,... las veces que cada una entra en esta ecuacion. Acabamos de ver que los numeradores A, B,... son números finitos diferentes de 0; y que pueden no existir en la descomposicion algunos de los numeradores A_1, B_1,...., L_1, etc: por consiguiente, segun el corolario del teorema anterior, tenemos

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_n}{(x-a)^{\alpha-n}}+...+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_p}{(x-b)^{\beta-p}}+...+\text{etc.}$$

siendo n, p,... números enteros y positivos, menores respectivamente que α, β,..., y A, A_n.... B, B_p,... números finitos diferentes de cero.

Demostremos en primer lugar que esta suma de fracciones parciales no puede ser idéntica á otra en que exista alguna fraccion con un denominador $(x-d)^{\delta}$, siendo d diferente de las raices a, b,... de la ecuacion $F(x)=0$: pues si una nueva des-

composicion nos diera la suma

$$\frac{A'}{(x-a)^{\alpha'}} + \text{etc} + \frac{D}{(x-d)^{\delta}} + \frac{D_r}{(x-d)^{\delta-r}} + \text{etc.},$$

tendríamos la identidad

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \text{etc} = \frac{A'}{(x-a)^{\alpha'}} + \text{etc.} + \frac{D}{(x-d)^{\delta}} + \frac{D_r}{(x-d)^{\delta-r},}$$

y multiplicando los dos miembros de esta identidad por $(x-d)^{\delta}$, tendríamos esta otra:

$$(x-d)^{\delta}\left(\frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \text{etc.}\right) = (x-d)^{\delta}\left(\frac{A'}{(x-a)^{\alpha'}} + \text{etc.}\right) +$$

$$D + D_r(x-d)^r + \text{etc.},$$

y dando ahora á x el valor d, los resultados 0 y D serian iguales, contra lo supuesto de que D es un número diferente de cero.

Queda pues demostrada esta primera parte.

Admitamos ahora que una nueva descomposicion nos dé la suma

$$\frac{A'}{(x-a)^{\alpha'}} + \frac{A'_{n'}}{(x-a)^{\alpha'-n'}} + \ldots + \frac{B'}{(x-b)^{\beta'}} + \frac{B'_{p'}}{(x-b)^{\beta'-p'}} + \ldots + \text{etc.};$$

siendo A', $A'_{n'}$.... B', $B'_{p'}$ ... números finitos diferentes de 0: tendríamos la identidad

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_n}{(x-a)^{\alpha-n}} + \ldots + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_p}{(x-b)^{\beta-p}} + \ldots + \text{etc.} =$$

$$\frac{A'}{(x-a)^{\alpha'}} + \frac{A'_{n'}}{(x-a)^{\alpha'-n'}} + \ldots + \frac{B'}{(x-b)^{\beta'}} + \frac{B'_{p'}}{(x-b)^{\beta'-p'}} + \ldots\ldots + \text{etc.}$$

Si $\alpha > \alpha'$, multiplicando los dos miembros de esta identidad por $(x-a)^{\alpha}$, resultará la nueva identidad

$$A + A_n(x-a)^n + \ldots + (x-a)^{\alpha}\left(\frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \text{etc.}\right) =$$

$$A'(x-a)^{\alpha-\alpha'} + A'_{n'}(x-a)^{\alpha-\alpha'+n'} + \ldots + (x-a)^{\alpha}\left(\frac{B'}{(x-b)^{\beta'}} + \text{etc.}\right),$$

y dando á x el valor a, resulta $A = 0$, contra lo supuesto; luego

α no es mayor que α'. Si por el contrario, suponemos que $\alpha < \alpha'$, se demostraria, multiplicando los dos miembros de la identidad supuesta por $(x-a)^{\alpha'}$, y haciendo en seguida $x = a$, que $A' = 0$, lo que tambien es contrario á lo supuesto; luego α no es menor que α': luego $\alpha = \alpha'$. Segun esto, la última identidad se reduce á

$$A + A_n (x-a)^n + \ldots + (x-a)\left(\frac{B}{(x-b)^\beta} + \text{etc.}\right) =$$

$$A' + A'_{n'}(x-a)^{n'} + (x-a)^\alpha\left(\frac{B}{(x-b)^\beta} + \text{etc.}\right),$$

la cual, dando á x el valor a, se reduce á $A = A'$; luego las dos fracciones simples $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$ y $\frac{A'}{(x-a)^\alpha}$ son idénticas. Restándolas de los dos miembros de la identidad supuesta, tendremos la nueva identidad

$$\frac{A_n}{(x-a)^{\alpha-n}} + \ldots + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \text{etc.} = \frac{A'_{n'}}{(x-a)^{\alpha-n'}} + \frac{B'}{(x-b)^{\beta'}} + \text{etc.};$$

y se demostrará del mismo modo que la fraccion $\frac{A_n}{(x-a)^{\alpha-n}}$, en que $x - a$ tiene el mayor esponente, es idéntica á la fraccion $\frac{A'_{n'}}{(x-a)^{\alpha-n'}}$, en que tambien $x - a$ tiene el mayor esponente; y asi sucesivamente. Luego queda demostrado que la nueva suma se compone de las mismas fracciones simples que la primera.

138 Pasemos ya á esponer las reglas para hallar los numeradores de las fracciones simples.

Método de descomposicion por partes.

En la demostracion del teorema (136) hemos visto que los numeradores $A, B, \ldots, L$ tienen los valores $A = \frac{f(a)}{(a-b)^\beta \ldots (a-l)^\lambda}$, $B = \frac{f(b)}{(b-a)^\alpha \ldots (b-l)^\lambda}$, $\ldots$, $L = \frac{f(l)}{(l-a)^\alpha (l-b)^\beta \ldots}$; lue-

go las fracciones simples cuyos denominadores son $(x-a)^\alpha$, $(x-b)^\beta, \ldots, (x-l)^\lambda$ son

$$\frac{\dfrac{f(a)}{(a-b)^\beta \ldots (a-l)^\lambda}}{(x-a)^\alpha}, \quad \frac{\dfrac{f(b)}{(b-a)^\alpha \ldots (b-l)^\lambda}}{(x-b)^\beta}, \ldots, \quad \frac{\dfrac{f(l)}{(l-a)^\alpha (l-b)^\beta \ldots}}{(x-l)^\lambda}.$$

Luego *para hallar los numeradores de las fracciones simples cuyos denominadores son las mayores potencias de todos los factores binomios del denominador de la propuesta, se suprime en el denominador de esta el de la fraccion simple cuyo numerador se busca, y despues se sustituye en la fraccion propuesta, asi modificada, en lugar de* x *el segundo término del denominador del factor binomio respectivo. Despues de hallar estas primeras fracciones simples, se resta su suma de la fraccion propuesta, se dividen los dos términos de la fraccion resultante por el producto de las primeras potencias de los factores simples del denominador, y se tendrá una nueva fraccion, en cuyo denominador los esponentes de los factores binomios serán menores en una unidad que los precedentes. Esta nueva fraccion se descompone del mismo modo; y asi hasta que lleguemos á una fraccion cuyo denominador sea la primera potencia de un binomio, ó á una fraccion cuyo denominador contenga el producto de las primeras potencias de varios factores binomios; la cual se descompondrá por la regla ordinaria: quedando entonces la fraccion dada descompuesta en fracciones simples.*

Ejemplos. 1.° $\dfrac{5x^2-1}{(x-1)^3(x+1)^2}$.

Sabemos (136, *Corol.*) que esta fraccion se descompone en la suma

$$\frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1}.$$

El numerador A se hallará haciendo $x = 1$ en la fraccion $\dfrac{5x^2-1}{(x+1)^2}$; y resulta $\qquad A = 1$.

El numerador B se hallará haciendo $x = -1$ en la fraccion $\dfrac{5x^2-1}{(x-1)^3}$; y resulta $\qquad B = -\frac{1}{2}$.

La suma de las dos fracciones simples halladas es $\dfrac{1}{(x-1)^3} - \dfrac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2} =$

$$\frac{(x+1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}{(x-1)^3(x+1)^2}: \text{ restán-}$$

dola de la propuesta, resulta la fraccion $\frac{\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}}{(x-1)^3(x-1)^2}$: la cual, dividiendo sus dos términos por el producto $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ de sus factores comunes, se convierte en

$$\frac{\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}{(x-1)^2(x+1)},$$

que es la fraccion que ahora tenemos que descomponer.

El numerador A_1 se halla haciendo $x = 1$ en la fraccion $\frac{\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}{x+1}$; y resulta $A_1 = \frac{3}{2}$.

El numerador B_1 se halla haciendo $x = -1$ en la fraccion $\frac{\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}{(x-1)^2}$; y resulta $B_1 = \frac{1}{2}$.

La suma de las dos fracciones parciales $\frac{\frac{3}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2}{(x-1)^2(x+1)}$ restada de la $\frac{\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}{(x-1)^2(x+1)}$ da de resto $\frac{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}{(x-1)^2(x+1)}$, que despues de haber dividido sus dos términos por $(x-1)(x+1)$, se reduce á la fraccion simple $\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}$; luego

$$\frac{5x^2 - 1}{(x-1)^3(x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} - \frac{\frac{1}{2}}{x-1}.$$

2.° $$\frac{2-4x}{x^2 - x - 2}.$$

Los factores simples del denominador son $x - 2$ y $x + 1$, y por tanto la fraccion propuesta es

$$\frac{2-4x}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}.$$

El numerador A se hallará haciendo $x = 2$ en la fraccion $\frac{2-4x}{x+1}$; y resulta $A = -2$.

El numerador B se hallará haciendo $x = -1$ en la fraccion $\frac{2-4x}{x-2}$; y resulta $B = -2$.

Sabemos (136, *Corol.*, *al fin.*) que en este caso la diferencia entre la fraccion propuesta y la suma de las dos fracciones simples $\frac{-2}{x-2} - \frac{2}{x+1}$ es 0; luego

$$\frac{2-4x}{(x-2)(x+1)} = -\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+1}.$$

3.° $$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{C_1}{x+1}.$$

El numerador A se hallará haciendo $x = 0$ en la fraccion propuesta, prescindiendo del factor x de su denominador; y resulta $A = 2$.

El numerador B se hallará haciendo $x = 1$ en la fraccion propuesta, prescindiendo del factor $(x-1)^2$; y resulta

$$B = 1.$$

El numerador C se hallará haciendo $x = -1$ en la fraccion propuesta, prescindiendo del factor $(x+1)^2$; y resulta

$$C = -\tfrac{1}{2}.$$

La suma de las tres fraccienes simples halladas es

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2} + \frac{2x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x + 2}{x(x-1)^2(x+1)^2}:$$

restada esta suma de la fraccion propuesta, encontramos la fraccion $\frac{-2x^4 + \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x}{x(x-2)^2(x+1)^2}$: dividiendo los dos términos de esta por $x(x-1)(x+1)$, resulta $\frac{-2x+\frac{1}{2}}{(x-1)(x+1)}$.

El numerador B_1 se hallará haciendo $x = 1$ en la fraccion $\frac{-2x+\frac{1}{2}}{x+1}$; y resulta $B_1 = -\frac{3}{4}$.

El numerador C_1 se hallará haciendo $x = -1$ en la fraccion $\frac{-2x+\frac{1}{2}}{x-1}$; y resulta $C_1 = -\frac{5}{4}$;

luego

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}-\frac{\frac{3}{4}}{x-1}-\frac{\frac{5}{4}}{x+1}.$$

4.° $$\frac{-5x^2-5x+6}{x(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-2}.$$

Los numeradores A, B, C, D se hallarán haciendo sucesivamente $x=0$, $x=1$, $x=-1$, $x=2$ en la fraccion propuesta, prescindiendo en ella respectivamente de los factores x, $x-1$, $x+1$, $x-2$; y asi resultan inmediatamente

$$A=3,\ B=2,\ C=-1,\ D=-4;$$

luego

$$\frac{-5x^2-5x+6}{x^4-2x^3-x^2+2x}=\frac{3}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{4}{x-2}.$$

139. Si la fraccion por descomponer es de la forma $\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}$, hay para su descomposicion en fracciones simples un método mas fácil que el de la descomposicion por partes.

Sea p el grado del polinomio $f(x)$, tendrá este polinomio p derivadas, y por consiguiente, desarrollando $f(x)$ ó $f(a+\overline{x-a})$, será

$$f(a+\overline{x-a})=f(a)+f'(a).(x-a)+\tfrac{1}{2}f''(a).(x-a)^2+$$
$$\tfrac{1}{2.3}f'''(a).(x-a)^3+\ldots+\tfrac{1}{2.3\ldots p}f^{(p)}(a).(x-a)^p;$$

luego

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}=\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha}+\frac{f'(a)}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{\frac{1}{2}f''(a)}{(x-a)^{\alpha-2}}+$$
$$\frac{\frac{1}{2.3}f'''(a)}{(x-a)^{\alpha-3}}+\ldots+\frac{\frac{1}{2.3\ldots p}f^{(p)}(a)}{(x-a)^{\alpha-p}}.$$

5.° Sea la fraccion $\frac{x^2-3x}{(x-2)^5}$ la que se trata de descomponer.

Tenemos $f(x)=x^2-3x$, $f'(x)=2x-3$, $f''(x)=2$;
luego $f(2)=-2$, $f'(2)=1$, $\frac{1}{2}f''(2)=1$;
por consiguiente

$$\frac{x^2-3x}{(x-2)^5}=-\frac{2}{(x-2)^5}+\frac{1}{(x-2)^4}+\frac{1}{(x-2)^3}.$$

$$6^\circ \quad \frac{5x^4 - 13x^3 + 14x^2 - 5x + 3}{x(x+1)(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{C_1}{(x-1)^2} + \frac{C_2}{x-1}.$$

Los numeradores A, B y C se hallarán haciendo en la fraccion propuesta $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$, prescindiendo en ella respectivamente de los factores x, $x+1$ y $(x-1)^3$; y por tanto

$$A = -3,\ B = 5,\ C = 2.$$

La suma de las tres fracciones simples halladas es $\frac{2x^4 - 9x^3 + 17x^2 - 9x + 3}{x(x+1)(x-1)^3}$, que restada de la fraccion propuesta nos da de resto $\frac{3x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x}{x(x+1)(x-1)^3}$. Dividiendo los dos términos de esta por el producto $x(x+1)(x-1)$, queda reducida á $\frac{3x-4}{(x-1)^2}$.

Hallándose esta fraccion en el caso particular (139), hallaremos fácilmente que se compone de las dos fracciones simples $\frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1}$; luego

$$\frac{5x^4 - 13x^3 + 14x^2 - 5x + 3}{x(x+1)(x-1)^3} = -\frac{3}{x} + \frac{5}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1}.$$

140. *Método de los coeficientes indeterminados.*

Para descomponer la fraccion racional $\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda}$, haremos, segun está demostrado,

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda} =$$

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$

$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$

$$+ \vdots$$

$$+ \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}$$

Quitando los denominadores, tendremos

$$f(x)=A(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}+A_1(x-a)(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}+\ldots+$$
$$A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}$$
$$+B(x-a)^{\alpha}\ldots(x-l)^{\lambda}+B_1(x-b)(x-a)^{\alpha}\ldots(x-l)^{\lambda}+\ldots+$$
$$B_{\beta-1}(x-b)^{\beta-1}(x-a)^{\alpha}\ldots(x-l)^{\lambda}$$
$$+L(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots+L_1(x-l)(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}+\ldots+$$
$$L_{\lambda-1}(x-l)^{\lambda-1}(x-a)^{\alpha}\ (x-b)^{\beta}\ldots$$

Este 2.° miembro es del grado $\alpha+\beta+\ldots+\lambda-1$, y por tanto, despues de desarrollado, tendrá $\alpha+\beta+\ldots+\lambda$ términos. El primer miembro $f(x)$ es del grado $\alpha+\beta+\ldots+\lambda-1$, ó de grado menor; luego tambien tiene $\alpha+\beta+\ldots+\lambda$ términos, añadiendolos con el coeficiente 0 si faltan algunos. Debiendo ser idénticos estos dos polinomios, serán iguales los coeficientes de las potencias iguales de la variable, y esta igualacion nos dará $\alpha+\beta+\ldots+\lambda$ ecuaciones de primer grado con respecto á dichos coeficientes, ecuaciones que serán distintas y compatibles, porque sabemos ya que cada uno de los coeficientes indeterminados, es decir de los numeradores de las fracciones simples, tiene un solo valor finito. Resolviendo pues dichas $\alpha+\beta+\ldots+\lambda$ ecuaciones, tendremos los valores de estos numeradores.

Nota. Cuando se aplique este método al caso en que todos los factores binomios del denominador sean simples, esto es al caso en que los factores binomios del denominador sean $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc., no habrá necesidad de efectuar las multiplicaciones indicadas en el segundo miembro, sino hacer sucesivamente $x=a$, $x=b$, $x=c$,....; y asi obtendremos fácilmente los valores de A, B, C.....

Apliquemos este método á los ejemplos anteriores.

1.° $$\frac{5x^2-1}{(x-1)^3(x+1)^2}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{x+1}.$$

Quitando los denominadores, tendremos

$$5x^2-1=A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)^2+$$
$$C(x-1)^2(x+1)^2+D(x-1)^3+E(x-1)^3(x+1).$$

ó $$5x^2-1=\begin{array}{l|l|l|l|l}C & x^4+B & x^3+A & x^2+2A & x+A\\ +E & +D & +B & -B & -B\\ & -2E & -2C & +3D & +C\\ & & -3D & +2E & -D\\ & & & & -E\end{array}$$

141. *Factores binomios imaginarios.*

Cuando el denominador $F(x)$ de la fraccion racional $\frac{f(x)}{F(x)}$ igualado á cero tiene raices imaginarias, estas son conjugadas dos á dos; y aunque las reglas precedentes no suponen que las raices de la ecuacion $F(x) = 0$ sean precisamente reales, sino que comprenden igualmente el caso en que algunas ó todas son imaginarias, no conviene seguirlas en este caso por la complicacion material del cálculo, y porque es preferible, para las operaciones ulteriores á que hayan de someterse las fracciones parciales, el que estas no tengan términos imaginarios.

Espliquemos la marcha que en tal caso se prefiere seguir.

142. 1.° La fraccion $\frac{Ax + B}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^\alpha}$, cuyo denominador no tiene mas que las potencias de los factores imaginarios $\left(x - a + b\sqrt{-1}\right)^\alpha$, $\left(x - a - b\sqrt{-1}\right)^\alpha$, no se puede descomponer sino en fracciones de términos imaginarios; por lo que la consideraremos como fraccion simple.

2.° *La fraccion* $\frac{\mathrm{Ax + B}}{\left((\mathrm{x-a})^2 + \mathrm{b}^2\right)^\alpha \mathrm{F}_1(\mathrm{x})}$, *en la que* $\mathrm{F}_1(\mathrm{x})$ *es el producto de las potencias de los factores binomios del denominador* $\mathrm{F(x)}$, *potencias diferentes de* $\left((\mathrm{x-a})^2 + \mathrm{b}^2\right)^\alpha$, *se descompone en la suma* $\frac{\mathrm{Ax + B}}{\left((\mathrm{x-a})^2 + \mathrm{b}^2\right)^\alpha} + \frac{\mathrm{f_1(x)}}{\left((\mathrm{x-a})^2 + \mathrm{b}^2\right)^{\alpha-1}\mathrm{F_1(x)}}$, *siendo* A *y* B *cantidades constantes y reales.*

Para demostrar este teorema, tenemos la igualdad evidente

$$\frac{f(x)}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^\alpha F_1(x)} = \frac{Ax + B}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^\alpha} + \frac{f(x)}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^\alpha F_1(x)} - \frac{Ax + B}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^\alpha},$$

ó

$$\frac{f(x)}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^\alpha F_1(x)} = \frac{Ax + B}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^\alpha} + \frac{f(x) - (Ax + B)F_1(x)}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^\alpha F_1(x)}.$$

Si en el numerador de esta última fraccion ponemos $a+b\sqrt{-1}$ en vez de x, tendremos, observando que esta sustitucion no anula á $F_1(x)$,

$$f(a+b\sqrt{-1})-\left(A(a+b\sqrt{-1})+B\right)F_1(a+b\sqrt{-1}).$$

Veamos si pueden hallarse valores reales y finitos de A y B que anulen á esta cantidad, ó que satisfagan á la ecuacion

$$f(a+b\sqrt{-1})-\left(A(a+b\sqrt{-1})+B\right)F_1(a+b\sqrt{-1})=0,$$

ó $$A(a+b\sqrt{-1})+B=\frac{f(a+b\sqrt{-1})}{F_1(a+b\sqrt{-1})}.$$

Como ya se sabe, que desarrollando $f(a+b\sqrt{-1})$ y $F_1(a+b\sqrt{-1})$, resultan cantidades imaginarias de la forma ordinaria, á las que llamaremos $P+Q\sqrt{-1}$ y $R+S\sqrt{-1}$, será

$$Aa+B+Ab\sqrt{-1}=\frac{P+Q\sqrt{-1}}{R+S\sqrt{-1}}=M+N\sqrt{-1},$$

y por tanto $$Aa+B=M,$$
$$Ab=N,$$

de donde $$A=\frac{N}{b},\ B=\frac{Mb-Na}{b},$$

cantidades reales y finitas, puesto que lo son M, N, a y b, y por que además b es diferente de 0 por suposicion.

Dando pues á las constantes A y B estos valores, se anulará $f(x)-(Ax+B)F_1(x)$, y por tanto será divisible por $x-a-b\sqrt{-1}$. Si es divisible por este factor binomio, tambien lo será por su conjugado $x-a+b\sqrt{-1}$, y por consiguiente será divisible por el producto de ambos $(x-a)^2+b^2$. Luego los dos términos de la fraccion $\dfrac{f(x)-(Ax+B)F_1(x)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\alpha F_1(x)}$ son divisibles por $(x-a)^2+b^2$: suprimiendo este factor comun, y llamando $f_1(x)$ al cociente del numerador dividido por $(x-a)^2+b^2$, dicha fraccion quedará reducida á $\dfrac{f_1(x)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\alpha-1}F_1(x)}$, y por consiguiente

$$\frac{f(x)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\alpha F_1(x)}=\frac{Ax+B}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\alpha}+\frac{f_1(x)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\alpha-1}F_1(x)}$$

Nota. Si como lo hemos supuesto siempre, la fraccion $\frac{f(x)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\alpha F_1(x)}$ tiene su numerador de menor grado que su denominador, como la funcion $(Ax+B)F_1(x)$ es tambien de menor grado que $\left((x-a)^2+b^2\right)^\alpha F_1(x)$, aun cuando sea $\alpha=1$, el numerador de la fraccion $\frac{f(x)-(Ax+B)F_1(x)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\alpha F_1(x)}$ será de menor grado que su denominador: luego habiendo partido uno y otro por $(x-a)^2+b^2$, es claro que el nuevo numerador $f_1(x)$ será de menor grado que el denominador $\left((x-a)^2+b^2\right)^{\alpha-1}F_1(x)$.

Corolario. La fraccion $\frac{f(x)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\alpha F_1(x)}=$

$$\frac{Ax+B}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\alpha}+\frac{A_1x+B_1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}x+B_{\alpha-1}}{(x-a)^2+b^2}$$

$$+\frac{\varphi(x)}{F_1(x)}.$$

En efecto, acabamos de demostrar que

$$\frac{f(x)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\alpha F_1(x)}=\frac{Ax+B}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\alpha}+\frac{f_1(x)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\alpha-1}F_1(x)}:$$

por el mismo teorema será

$$\frac{f_1(x)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\alpha-1}F_1(x)}=\frac{A_1x+B_1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\alpha-1}}+\frac{f_2(x)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\alpha-2}F_1(x)},$$

$$\frac{f_2(x)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\alpha-2}F_1(x)}=\frac{A_2x+B_2}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\alpha-2}}+\frac{f_3(x)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\alpha-3}F_1(x)},$$

y asi sucesivamente hasta que lleguemos á la fraccion

$$\frac{f_{\alpha-1}(x)}{\left((x-a)^2+b^2\right)F_1(x)}=\frac{A_{\alpha-1}x+B_{\alpha-1}}{(x-a)^2+b^2}+\frac{\varphi(x)}{F_1(x)}.$$

Por consiguiente, sumando todas estas identidades ordenada-

mente y simplificando, será

$$\frac{f(x)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\alpha}F_1(x)}=\frac{Ax+B}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\alpha}}+\frac{A_1x+B_1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\alpha-1}}+$$

$$\frac{A_2x+B_2}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\alpha-2}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}x+B_{\alpha-1}}{(x-a)^2+b^2}+\frac{\varphi(x)}{F_1(x)}.$$

Nota. La fraccion $\frac{\varphi(x)}{F_1(x)}$ se halla en uno de los casos anteriores, y por consiguiente se descompondrá en fracciones simples, segun queda dicho.

143. Para determinar los numeradores de las fracciones parciales, se seguirá el método de los coeficientes indeterminados.

Ejemplo. Descomponer en fracciones simples la fraccion $\frac{1}{(x+1)(x^2+2)(x^2+1)^2}$.

Haremos $\frac{1}{(x+1)(x^2+2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+$

$$\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}+\frac{Fx+G}{x^2+1}.$$

Quitando denominadores, efectuando las multiplicaciones y ordenando, tendremos,

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l|l}
1=A'x^6 & +B & x^5 & +4A & x^4 & +2B & x^3 \\
+B & +C & & +2B & & +2C & \\
+F & +F & & +C & & +D & \\
 & +G & & +D & & +E & \\
 & & & +3F & & +3F & \\
 & & & +G & & +3G & \\
 & & & & & & \\
\end{array}
\begin{array}{l|l|l|l|l|l|l}
+5A & x^2 & +B & x & +2A \\
 & & +C & & +C \\
 & & +2D & & +2E \\
 & & +2E & & +2G \\
 & & +2F & & \\
 & & +2G & & \\
 & & & & \\
\end{array}$$

Por consiguiente tendremos las siete ecuaciones de primer grado con siete incógnitas:

$$\begin{aligned}
A+B+F&=0,\\
B+C+F+G&=0,\\
4A+2B+C+D+3F+G&=0,\\
2B+2C+D+E+5F+3G&=0,\\
5A+B+2C+2D+E+2F+3G&=0,\\
B+C+2D+2E+2F+2G&=0,\\
2A+C+2E+2G&=1.
\end{aligned}$$

Conviene principiar por eliminar la D (*Alg. elem.* 84, 5.°), y la

eliminaremos entre 3.ª y 4.ª entre 4.ª y 5.ª y entre 5.ª y 6.ª, y asi resultan las seis ecuaciones con seis incógnitas:

$$\begin{aligned} A + B + F &= 0, \\ B + C + F + G &= 0, \\ 4A - C - E - 2G &= 0, \\ 5A - 3B - 2C - E - 4F - 3G &= 0, \\ 5A + C - E + G &= 0, \\ 2A + C + 2E + 2C &= 1. \end{aligned}$$

Elimino ahora la F entre 1.ª y 2.ª, y entre 2.ª y 4.ª, y resultan las cinco ecuaciones con cinco incógnitas:

$$\begin{aligned} A - C - G &= 0, \\ 5A + B + 2C - E + G &= 0, \\ 4A - C - E - 2G &= 0, \\ 5A + C - E + G &= 0, \\ 2A + C + 2E + 2G &= 1. \end{aligned}$$

Como la B no entra mas que en la segunda ecuacion, prescindo de esta ecuacion, y tendré cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

Elimino la E entre las 2.ª y 3.ª de estas cuatro, y entre las 3.ª y 4.ª, y tendré las tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} A + 2C + 3G &= 0, \\ 12A + 3C + 4G &= 1, \\ A - C - G &= 0. \end{aligned}$$

Elimino la A entre 1.ª y 2.ª, y entre 1.ª y 3.ª, y resultan las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} 21C + 32G &= -1, \\ 3C + 4G &= 0, \end{aligned}$$

de las cuales resultan

$$C = \tfrac{4}{3},\ G = -\tfrac{1}{4},$$

y por consiguiente

$$A = \tfrac{1}{12},\ E = \tfrac{1}{2},\ B = -\tfrac{1}{3},\ F = \tfrac{1}{4},\ D = -\tfrac{1}{2}.$$

Luego

$$\frac{1}{(x+1)x^2(x^2+2)(x^2+1)^2} = \frac{\frac{1}{12}}{x+1} - \frac{\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}}{x^2+2} - \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{(x^2+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}{x^2+1} = \frac{1}{12(x+1)} - \frac{x-1}{3(x^2+2)} - \frac{x-1}{2(x^2+1)^2} + \frac{x-1}{4(x^2+1)}.$$

Nota El teorema (136) puede esponerse bajo la forma siguiente, mas general, y que se demuestra del mismo modo.

Si $F(x)=(x-a)^{\alpha}\ldots(x-1)^{\lambda}F_1(x)$, siendo $F_1(x)$ el producto de las potencias de los factores binomios, reales ó imaginarios, ó de las dos clases, del denominador, será

$$\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\lambda}F_1(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\ldots+$$
$$\frac{L}{(x-l)^{\lambda}}+\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\ldots(x-l)^{\lambda-1}F_1(x)},$$

siendo

$$A=\frac{f(a)}{(a-b)^{6}\ldots(a-l)^{\lambda}F_1(a)},\ldots,\ L=\frac{f_1(l)}{(l-a)^{\alpha}(l-b)^{\alpha}\ldots F_1(l)}.$$

Corolario.

$$\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}\ldots(x-l)^{\lambda}F_1(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\lambda-1}}{x-a}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{L}{(x-l)^{\lambda}}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{x-l}$$
$$+\frac{\varphi(x)}{F_1(x)}.$$

De este teorema se infiere que si el denominador de la fraccion dada tiene raices reales ó imaginarias, se podrán hallar los numeradores de las fracciones simples correspondientes á los factores binomios reales por el método de descomposicion por partes; y restando la suma de estas fracciones simples de la fraccion propuesta, quedará por descomponer una fraccion cuyo denominador no tendrá mas que factores binomios imaginarios. Los numeradores de las fracciones simples, correspondientes á esta última fraccion, se hallarán por el método de los coeficientes indeterminados.

Puede aplicarse este método al ejemplo anterior, cuyo denominador tiene el factor binomio real $x+1$.

NOTA.

ANÁLISIS INDETERMINADA DE PRIMER GRADO.

144. Sabemos (*Alg. elem.* 99) que un sistema de ecuaciones de primer grado, en que el número de incógnitas es mayor que el de ecuaciones, admite una infinidad de soluciones. La análisis indeterminada de primer grado tiene por objeto resolver los dos problemas siguientes:

1°. *Hallar las soluciones enteras y positivas de una ecuacion de primer grado con dos ó mas incógnitas.* 2°. *Hallar las soluciones enteras y positivas de un sistema de ecuaciones de primer grado con mayor número de incógnitas.*

Para resolver el primero de estos dos problemas, conviene principiar por demostrar los teoremas siguientes:

145. *Una ecuacion de primer grado*

$$ax + by + cz + \ldots = k$$

no admite ninguna solucion entera, si los coeficientes a, b, c... *tienen algun factor comun, que no lo sea del segundo miembro* (a).

En efecto, sea f el factor comun á los coeficientes a, b, c..., y $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$,.... una solucion de la ecuacion, siendo α, β, γ,.... números enteros: tendremos

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots = k:$$

siendo f un factor comun á a, b, c, ... , será factor de $a\alpha$, de $b\beta$, de $c\gamma$, ..., y por consiguiente tambien f será divisor de la suma $a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots$ ó de su igual k; lo que es contrario á la hipótesi.

146 *La ecuacion con dos incógnitas*

$$ax + by = c,$$

(a) En toda esta teoria supondremos, aun cuando no lo advirtamos, que la ecuacion de primer grado $ax + by + cz + \ldots = k$ tiene sus coeficientes enteros, y que esta completamente simplificada.

en la que los coeficientes a, b, c *son enteros, y* a y b *primos entre sí, admite una infinidad de soluciones enteras.*

Hagamos positivo, si no lo es, el coeficiente a ó b que tenga menor valor absoluto, lo que se consigue en caso necesario mudando los signos de todos los términos de la ecuacion; y supongamos que sea a el coeficiente positivo de menor valor absoluto que b.

$$\begin{array}{c|c|c|

son los residuos que se encuentran haciendo con b y a las mismas operaciones que para hallar su *m. c. d*, estamos seguros de llegar á un residuo 1, puesto que b y a son números primos entre sí.

Supongamos, para fijar las ideas, que el residuo $r'' = 1$: tendremos por lo tanto

$$t = p'' - q''t' + \frac{s'' - t'}{r'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; [C].$$

Hagamos por último $\frac{s'' - t'}{r'} = t''$,

y será $t' = s'' - r't''$.

Es evidente que cualquier valor entero de t'' (*a*) hace tambien entero á t'. Siendo enteros t'' ó $\frac{s'' - t'}{r'}$ y t', la ecuacion [*C*] prueba que tambien lo será t. Siendo enteros t y t' ó $\frac{s' - r't}{r}$, la ecuacion [*B*] prueba que tambien será entero el valor de y. Siendo y entero, y tambien t ó su igual $\frac{s - ry}{a}$, la ecuacion [*A*] prueba que el valor correspondiente de x será tambien entero.

Segun esto, por cada valor entero de t'' resulta un valor entero de y y otro de x que satisfacen á la ecuacion [*A*], que es la ecuacion dada, puesta bajo otra forma; y como á t'' podemos dar una infinidad de valores enteros, se infiere que la ecuacion propuesta tiene una infinidad de soluciones enteras.

Nota. En la demostracion anterior hemos considerado á b y c como positivos; pero los signos no influyen en dicho razonamiento, y puede repetirse, si se quiere, poniendo en la ecuacion propuesta $-b$ en lugar de b, y $-c$ en lugar de c.

Ejemplo. *Hallar las infinitas soluciones enteras de la ecuacion*

$$23x - 85y = 141.$$

Despejando la x, tendremos

$$x = \frac{141 + 85y}{23} = 6 + 3y + \frac{3 + 16y}{23}.$$

Hago $\frac{3 + 16y}{23} = t$,

(*a*) Por abreviar la frase, consideraremos en esta teoría al 0 como número entero.

de donde $$y = \frac{23t - 3}{16} = t + \frac{7t - 3}{16}.$$

Hago $$\frac{7t - 3}{16} = t',$$

de donde $$t = \frac{3 + 16t'}{7} = 2t' + \frac{3 + 2t'}{7}.$$

Hago $$\frac{3 + 2t'}{7} = t'',$$

de donde $$t' = \frac{7t'' - 3}{2} = 3t'' - 1 + \frac{t'' - 1}{2}.$$

Hago por último $$\frac{t'' - 1}{2} = t''',$$

de donde $$t'' = 1 + 2t'''.$$

Dando ahora, á t''' un valor arbitrario entero, 0 por ejemplo, será $t'' = 1$, y por consiguiente

$$t' = 2,\ t = 5;\ y = 7,\ x = 32.$$

Tenemos ya una solucion entera $x = 32$, $y = 7$.

Dando á t''' el valor 1, será

$$t'' = 3,\ t = 21;\ y = 30,\ x = 117.$$

Tenemos otra solucion entera $x = 117$, $y = 30$.

Continuando del mismo modo, pueden hallarse cuantas soluciones enteras se quieran.

147. *Habiendo obtenido una solucion entera* $x = \alpha$, $y = \beta$ *de la ecuacion* $ax + by = c$, *las fórmulas* $x = \alpha - bt$, $y = \beta + at$, *en que* t *es un número entero cualquiera positivo ó negativo, nos darán las infinitas soluciones enteras de dicha ecuacion.*

En efecto, sea $\alpha + m$, $\beta + n$ otra cualquiera de las infinitas soluciones enteras de la ecuacion: tendremos

$$a(\alpha + m) + b(\beta + n) = c,$$

y efectuando, y reduciendo, será

$$am + bn = 0,$$

de donde $$\frac{m}{n} = -\frac{b}{a}.$$

Puesto que $\alpha + m$ y $\beta + n$ forman una solucion entera de la ecuacion propuesta, se infiere que m y n son números enteros,

y por consiguiente, puesto que a y b son primos entre sí, serán m y n (*Aritm.* 39) iguales respectivamente á $-b$ y a multiplicados por un mismo número entero t, es decir $m = -bt$, $n = at$; luego $\alpha + m = \alpha - bt$, $\beta + n = \beta + at$; luego toda solucion de la ecuacion propuesta se halla contenida en las fórmulas $x = \alpha - bt$, $y = \beta + at$. Al contrario, toda combinacion de valores que nos den estas fórmulas, teniendo t un valor cualqniera, es una solucion de la ecuacion propuesta; pues sustituyendo estos valores en dicha ecuacion, resulta la identidad $a\alpha + b\beta = c$; que es lo que queriamos demostrar.

Nota. Dando á t en estas fórmulas los valores ... 3,2,1,0, -1, -2, -3, ..., los correspondientes de x é y son:

$x = \ldots \alpha - 3b,\ \alpha - 2b,\ \alpha - b,\ \alpha,\ \alpha + b,\ \alpha + 2b,\ \alpha + 3b, \ldots$

$y = \ldots \beta + 3a,\ \beta + 2a,\ \beta + a,\ \beta,\ \beta - a,\ \beta - 2a,\ \beta - 3a, \ldots$

Luego los valores de x forman una progresion aritmética, cuya diferencia es el coeficiente de y, y los de y forman una progresion aritmética, cuya diferencia es el coeficiente de x mudado el signo; ó al contrario, porque se puede cambiar en las dos fórmulas el signo de t, y escribir

$$x = \alpha + bt,\ y = \beta - at.$$

148. Esto supuesto, se puede decir que la única dificultad, para hallar las infinitas soluciones enteras de la ecuacion $ax + by = c$, consiste en hallar una solucion entera $x = \alpha, y = \beta$.

La demostracion del teorema (146) nos indica el modo de hallar esta solucion; pero no hay necesidad de continuar hasta el fin, pues siempre se llega, mas ó menos pronto, á un quebrado en que es fácil ver el valor que debe darse á la indeterminada, que entra en el numerador, para que el cociente sea un número entero.

Asi, en la ecuacion

$$23x - 85y = 141$$

despejando la x, tendremos

$$x = \frac{141 + 85y}{23} = 6 + 3y + \frac{3 + 16y}{23}.$$

Hago

$$\frac{3 + 16y}{23} = t,$$

de donde

$$y = \frac{23t - 3}{16} = t + \frac{7t - 3}{16}.$$

Sin pasar adelante, se ve que $t = 5$ hace entero al cociente $\frac{7t-3}{16}$:

por consiguiente

$$y = 7 = \beta,\ x = 32 = \alpha;$$

luego las fórmulas que nos darán las infinitas soluciones enteras de la ecuacion, serán

$$x = 32 + 85t,\ y = 7 + 23t.$$

Otro ejemplo. Hallar las infinitas soluciones enteras de la ecuacion

$$55x - 24y = 93,$$

ó

$$24y - 55x = -93.$$

Tenemos, despejando la y,

$$y = \frac{55x - 93}{24} = 2x - 3 + \frac{7x - 21}{24};$$

donde se vé que haciendo $x = 3 = \alpha$ se desvanece el quebrado $\frac{7x - 21}{24}$, y queda por consiguiente para y el valor entero $y = 3 = \beta$: luego las fórmulas serán

$$x = 3 + 24t,\ y = 3 + 55t.$$

149. Casos particulares en que se halla con brevedad una solucion entera.

1° Cuando uno de los coeficientes de las incógnitas es divisor del 2.° miembro, se da á la otra incógnita el valor 0, y se hallará fácilmente el valor entero correspondiente de la primera.

Ejemplo. $3x + 7y = 15.$

Como 3 es divisor de 15, haré $y = 0 = \beta$, y será por consiguiente $x = 5 = \alpha$:

luego las fórmulas son

$$x = 5 - 7t,\ y = 3t.$$

2.° Cuando el segundo miembro c es múltiplo de $a + b$ ó de $a - b$; pues si

$$c = (a + b)m,\ \text{ó}\ am + bm = c,$$

será evidentemente $\alpha = m,\ \beta = m;$

y si $c = (a - b)m = am - bm,$

será $\alpha = m,\ \beta = -m.$

Ejemplos. 1.° $7x + 9y = 64.$

Como $64 = (7 + 9) \times 4,$

será $\alpha = 4,\ \beta = 4;$

y las fórmulas serán

$$x = 4 - 9t,\ y = 4 + 7t.$$

2.° $$7x + 3y = 20.$$

Como $$20 = (7 - 3) \times 5,$$

será $$\alpha = 5,\ \beta = -5,$$

y por consiguiente

$$x = 5 - 3t,\ y = -5 + 7t.$$

X 150. La regla (5) para la formacion de las reducidas de una fraccion continua dá tambien un método, aunque no tan sencillo como el espuesto, para hallar una solucion entera de la ecuacion

$$ax + by = c.$$

Sea $\frac{b'}{a'}$ la penúltima reducida de la fraccion continua equivalente al valor absoluto de $\frac{b}{a}$: sabemos que la última reducida será $\frac{b}{a}$.

Ahora bien, si $\frac{b'}{a'}$ ocupa lugar par, la $\frac{b}{a}$ ocupará lugar impar;

y por consiguiente $$ab' - ba' = 1;$$

luego tambien $$a \times b'c - b \times a'c = 1 \times c;$$

luego $$\alpha = b'c,\ \beta = -a'c.$$

Si la penúltima reducida $\frac{b'}{a'}$ ocupa lugar impar, y por consiguiente la $\frac{b}{a}$ lugar par, será $ab' - ba' = -1$, y por tanto multiplicando los dos miembros de esta igualdad por $-c$, será

$$a \times -b'c + b \times a'c = c;$$

luego $$\alpha = -b'c,\ \beta = a'c.$$

46 *Ejemplo.* Hallar las soluciones enteras de la ecuacion

$$23x - 85y = 141.$$

Reduzcamos á fraccion continua la fraccion ordinaria $\frac{85}{23}$, y tendremos

85	23	16	7	2	1	
	3	1	2	3	2	
16	7	2	1	0		

$$\frac{85}{23} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Las reducidas son: $\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{7}{3}, \frac{37}{16}, \frac{85}{37}$. La penúltima ocupa lugar par; luego $37 \times 23 - 85 \times 10 = 1$; y multiplicando los dos miembros de esta igualdad por 141, será

$$23 \times 37.141 - 85 \times 10.141 = 141;$$

y por tanto $\alpha = 37.141$, $\beta = 10.141$; y las fórmulas serán

$$x = 5217 + 85t, \quad y = 1410 + 23t.$$

151. Pasemos ya á hallar las soluciones enteras y positivas de la ecuacion $ax + by = c$.

Supondremos, como antes, que a es un número entero positivo; b podrá ser positivo ó negativo; y por lo tanto tenemos que considerar dos casos, b positivo, ó b negativo.

1.° Si a y b son positivos, c deberá tambien ser positivo, pues de otro modo x é y no podrian tener valores positivos, como queremos que los tengan.

Las soluciones enteras de la ecuacion propuesta se obtienen por las fórmulas

$$x = \alpha - bt, \; y = \beta + at;$$

luego si estos valores enteros de x é y han de ser positivos, deberán verificarse las desigualdades

$$\alpha - bt > 0, \; \beta + at > 0,$$

de las cuales resultan

$$t < \frac{\alpha}{b}, \; t > -\frac{\beta}{a}.$$

Vemos que t se halla comprendido entre los dos números $\frac{\alpha}{b}$ y $\frac{-\beta}{a}$; y como t es entero, el número de sus valores será limitado, y por tanto la ecuacion propuesta tendrá un número finito de soluciones enteras y positivas. Si sucede que los dos números $\frac{\alpha}{b}$ y $\frac{-\beta}{a}$ no comprenden ningun número entero, la ecuacion propuesta no tendrá ninguna solucion entera y positiva.

2.° Si a es positivo y b negativo, poniendo en manifiesto el signo de b, la ecuacion será

$$ax - by = c;$$

y las fórmulas que darán en este caso las soluciones enteras, serán

$$x = \alpha + bt, \; y = \beta + at;$$

valores que serán positivos si

$$\alpha + bt > 0, \; \beta + at > 0,$$

ó $$t > -\frac{a}{b},\ t > -\frac{6}{b};$$

luego dando á t valores mayores que estos números $-\frac{a}{b}$ y $-\frac{6}{b}$, las desigualdades quedarán satisfechas, y por tanto la ecuacion propuesta tendrá una infinidad de soluciones enteras y positivas.

Ejemplos. 1.° *Entre varios hombres y mujeres han gastado* 330 *reales en una fiesta : cada hombre ha pagado* 16 *reales y cada mujer* 9 *reales, ¿cuántos hombres y mujeres habia?*

Sea x el número de hombres, y el de las mujeres : tendremos la ecuacion $$16x + 9y = 330.$$

De esta ecuacion deduciremos fácilmente las fórmulas

$$x = -3 - 9t,\ y = 42 + 16t;$$

y pues el número de hombres y mujeres es positivo, tendremos

$$-3 - 9t > 0,\ 42 + 16t > 0,$$

de donde $$t < -\tfrac{1}{3},\ t > -2\tfrac{5}{8}.$$

Como estos límites han salido negativos, mudaremos en las fórmulas el signo de t, y serán

$$x = -3 + 9t,\ y = 42 - 16t;$$

luego $$-3 + 9t > 0,\ 42 - 16t > 0,$$

de donde resultan $t > \frac{1}{3}$, $t < 2\frac{5}{8}$. Luego los únicos valores que puede tener t, son 1 y 2; y por tanto el problema no tiene mas soluciones que las dos siguientes:

$$t = 1 \ldots\ x = 6,\ y = 26,$$
$$t = 2 \ldots\ x = 15,\ y = 10.$$

2.° *Componer* 500 *reales con duros y napoleones.*

Sean x é y los números de duros y napoleones: tendremos

$$20x + 19y = 500.$$

Como 20 es divisor de 500, tendremos $y = 0 = 6$, $x = 25 = a$; y las fórmulas serán

$$x = 25 - 19t,\ y = 20t.$$

Por consiguiente

$$25 - 19t > 0,\ 20t > 0;$$
$$t < \tfrac{25}{19},\ t > 0;$$

luego t no puede tener mas valor que 1; y por tanto $x = 6$, $y = 20$, única solucion del problema.

3.° *Componer* 300 *reales con duros y napoleones.*

Tenemos $$20x + 19y = 300;$$
$$y = 0 = 6,\ x = 15 = a;$$
$$x = 15 - 19t,\ y = 20t.$$

Tendremos ahora $15 - 19t > 0,\ 20t > 0;$

$$t < \frac{15}{19},\ t > 0;$$

luego t no tiene ningun valor entero comprendido entre estos dos números, y por tanto el problema es imposible.

4.° *Hallar un número que dividido por 7 dé 5 de residuo, y que dividido por 18 dé 3 de residuo.*

Sea N el número, x el cociente entero y positivo de su division por 7, y el de su division por 5: tendremos

$$N = 7x + 5,\ N = 18y + 3;$$

y por consiguiente $7x + 5 = 18y + 3,$

ó $7x - 18y = -2.$

Las fórmulas son

$$x = 10 + 18t,\ y = 4 + 7t.$$

Como x é y deben ser positivos, tendremos

$$10 + 18t > 0,\ 4 + 7t > 0,$$

ó $t > \frac{-5}{9},\ t > -\frac{4}{7}$; es decir t puede tener los infinitos valores 0, 1, 2, 3, 4...., y la ecuacion propuesta los infinitas soluciones respectivas:

$$x = 10,\ y = 4,$$
$$x = 28,\ y = 11,$$
$$x = 46,\ y = 18,$$
$$x = 64,\ y = 39,$$
$$\text{etc.};$$

y por tanto los infinitos valores de N son

$$N = 75,\ 201,\ 327,\ 453,\ \text{etc.}$$

152. *Resolucion en números enteros y positivos de una ecuacion* ax + by + cz +....= k, *que tiene tres ó mas incógnitas.*

Consideremos en primer lugar la ecuacion de primer grado con tres incógnitas $ax + by + cz = d.$

Tenemos que distinguir dos casos: 1.° que existan dos coeficientes (entre los tres a, b, c) que sean primos entre sí. 2.° que tomados dos á dos tengan siempre un factor comun.

Primer caso. Supongamos que a y b sean números primos entre sí.

Considerando á z como conocida, y pasando al segundo miembro el término cz, será la ecuacion

$$ax + by = d - cz.$$

Hallaremos ahora una solucion $x = \alpha$, $y = \beta$ de esta ecuacion (α y β tendrán en general la forma $m + nz$, $p + qz$); y las fórmulas que nos darán todas las soluciones enteras de la ecuacion, serán

$$x = \alpha - bt, \quad y = \beta + at,$$

en las cuales, dando á z y t valores enteros, se tendrán los valores enteros correspondientes de x é y.

Pero si los valores de x, y, z han de ser enteros y positivos, los valores de z y t deberán satisfacer á las desigualdades

$$\alpha - bt > 0, \quad \beta + at > 0.$$

Ejemplo. Hallar las soluciones enteras y positivas de la ecuacion

$$5x - 7y + 21z = 101.$$

Como los coeficientes de x é y son primos entre sí, tendremos, considerando á z como conocida,

$$5x - 7y = 101 - 21z.$$

Despejando la x, será

$$x = \frac{101 - 21z + 7y}{5} = 20 - 4z + y + \frac{2y - z + 1}{5}.$$

Hago

$$\frac{2y - z + 1}{5} = t,$$

de donde

$$y = \frac{5t + z - 1}{2} = 2t + \frac{t + z - 1}{2}.$$

Veo que si $t = 1 - z$, el valor de y será entero:

$$y = 2(1 - z) = \beta, \quad x = 23 - 7z = \alpha.$$

Luego las fórmulas son:

$$x = 23 - 7z + 7t,$$
$$y = 2 - 2z + 5t.$$

Dando en estas fórmulas á z y t valores enteros arbitrarios, se obtendrán los correspondientes de x é y.

Mas si los valores de x, y, z han de ser tambien positivos, estableceremos en primer lugar las desigualdades

$$23 - 7z + 7t > 0,$$
$$2 - 2z + 5t > 0,$$

de las cuales resultan

$$t > \frac{7z - 23}{7}, \quad t > \frac{2z - 2}{5};$$

es decir, que si damos á z un valor arbitrario entero y positivo,

1, 2, 3...., deberemos dar á t un valor mayor que el mayor de los quebrados $\frac{7z-23}{7}$, $\frac{2z-2}{5}$.

Asi, si $z=1$, como entonces $t > \frac{-16}{7}$, $t > 0$; t deberá ser mayor que 0. Hagamos pues $t=1$: los valores correspondientes de x é y serán

$$x=23,\ y=5.$$

Componen pues una solucion de la ecuacion propuesta los números enteros y positivos

$$x=23,\ y=5,\ z=1.$$

Se pueden de este modo hallar infinitas soluciones enteras y positivas.

Segundo caso. Si los coeficientes a, b, c tomados dos á dos tienen siempre un factor comun, pasando cz al segundo miembro, será

$$ax+by=d-cz.$$

Sea m el mayor factor comun á a y b, m y c serán primos entre sí, pues sino, los tres coeficientes a, b, c tendrian un factor comun, lo que no puede ser (145). Sean a' y b' los cocientes de las divisiones de a y b por m: tendremos

$$a'x+b'y=\frac{d-cz}{m},$$

ecuacion en que a' y b' son números primos entre sí.

Ahora, puesto que $\frac{d-cz}{m}$ debe ser entero, haremos

$$\frac{d-cz}{m}=t,\ \text{ó}\ mt+cz=d,$$

ecuacion en la que los coeficientes m y c son primos entre sí, y que por consiguiente tiene infinitas soluciones enteras: de ella resultan las fórmulas

$$t=\alpha-ct',\ z=\beta+mt'.$$

La ecuacion propuesta será por lo tanto

$$a'x+b'y=\alpha-ct',$$

de la cual salen las fórmulas

$$x=\alpha'-b't'',\ y=\beta'+a't'',$$

siendo $x=\alpha'$, $y=\beta'$ una solucion de la misma, y contenien-

do α' y β', ó por lo menos una de las dos, á la indeterminada t': luego tendremos por último las fórmulas

$$x = \alpha' - b't'',$$
$$y = \beta' + a't'',$$
$$z = \beta + mt';$$

es decir que en general x é y dependen de las dos indeterminadas t' y t'', mientras que z solo depende de una sola indeterminada t'.

Ahora, si los valores de x, y, z han de ser positivos, estableceremos las desigualdades

$$\alpha' - b't'' > 0,$$
$$\beta' + a't'' > 0,$$
$$\beta + mt' > 0,$$

que nos indicarán los valores enteros que pueden darse á las indeterminadas t' y t'', para que dichas desigualdades se verifiquen.

Ejemplo. $10x + 15y + 6z = 101.$

Tomando dos á dos los tres coeficientes 10, 15 y 6, siempre tiene un factor comun. Pasemos $6z$ al segundo miembro, y tendremos

$$10x + 15y = 101 - 6z,$$

ó

$$2x + 3y = \frac{101 - 6z}{5}.$$

Como $\frac{101 - 6z}{5}$ debe ser entero, haremos

$$\frac{101 - 6z}{5} = t, \text{ ó } 5t + 6z = 101,$$

de donde resultan las fórmulas

$$t = 19 - 6t', \; z = 1 + 5t':$$

luego la ecuacion propuesta se convierte en

$$2x + 3y = 19 - 6t',$$

que nos da las fórmulas

$$x = 8 - 3t' - 3t'', \; y = 1 + 2t''.$$

Luego las fórmulas que nos darán las soluciones enteras de la ecuacion propuesta son

$$x = 8 - 3t' - 3t'',$$
$$y = 1 + 2t'',$$
$$z = 1 + 5t'.$$

Si estos números han de ser positivos, tendremos

$$8 - 3t' - 3t'' > 0,$$
$$1 + 2t'' > 0,$$
$$1 + 5t' > 0.$$

Las dos últimas de estas tres desigualdades nos dan $t'' > -\frac{1}{2}$, $t' > -\frac{1}{5}$; luego estas dos quedan satisfechas dando á t' y t'' valores enteros y positivos desde 0 en adelante.

Pero la primera desigualdad limita los valores de estas indeterminadas; pues de ella resulta

$$t' + t'' < \frac{8}{3}.$$

Tenemos pues las seis soluciones siguientes:

1.ª $t' = 0,\ t'' = 0;\ x = 8,\ y = 1,\ z = 1,$
2.ª $t' = 0,\ t'' = 1;\ x = 5,\ y = 3,\ z = 1,$
3.ª $t' = 0,\ t'' = 2;\ x = 2,\ y = 5,\ z = 1,$
4.ª $t' = 1,\ t'' = 0;\ x = 5,\ y = 1,\ z = 6,$
5.ª $t' = 1,\ t'' = 1;\ x = 2,\ y = 3,\ z = 6,$
6.ª $t' = 2,\ t'' = 0;\ x = 2,\ y = 1,\ z = 11.$

50 153. Pasemos ahora á hallar las soluciones enteras y positivas de la ecuacion con cuatro, cinco, etc. incógnitas

$$ax + by + cz + du + \ldots = k.$$

Hay que considerar dos casos como en la ecuacion con tres incógnitas; á saber: 1.° que existan dos coeficientes primos entre sí; 2.° que tomados dos á dos los coeficientes tengan siempre un factor comun.

Primer caso. Si a y b son primos entre sí, se pasan los términos cz, du, etc. al segundo miembro, y se procede como en el primer caso de la ecuacion con tres incógnitas.

Segundo caso. Se sigue tambien la misma marcha que en el segundo caso de la ecuacion con tres incógnitas.

Ejemplo 1.° $2x + 3y - 4z - 5u = 100.$

Como los coeficientes de x é y son primos entre sí, tendremos

$$2x + 3y = 100 + 4z + 5u,$$

de donde

$$x = 50 + 2z + u - 3t,$$
$$y = u + 2t.$$

Se darán ahora á z y u valores enteros y positivos cualesquiera, y á t valores enteros convenientes, para que los correspondientes de x é y salgan positivos.

Ejemplo 2.° $12x + 6y + 10z - 15u = 73.$

En esta ecuacion los coeficientes de las incógnitas tomados dos á dos tienen siempre un factor comun.

Escribiremos pues la ecuacion de este modo:

$$12x + 6y = 73 + 15u - 10z,$$

$$2x + y = \frac{73 + 15u - 10z}{6} \ldots [A].$$

Como el segundo miembro debe ser entero, haremos

$$\frac{73 + 15u - 10z}{6} = t,$$

ó $$6t + 10z - 15u = 73,$$

que es el segundo caso de una ecuacion con tres incógnitas. Escribiremos pues esta ecuacion del modo siguiente:

$$6t + 10z = 73 + 15u,$$

ó $$3t + 5z = \frac{73 + 15u}{2} \ldots\ldots [B].$$

Como $\frac{73 + 15u}{2}$ debe ser entero, haremos

$$\frac{73 + 15u}{2} = t', \text{ ó } 2t' - 15u = 73,$$

de donde resultan las fórmulas

$$t' = 29 + 15t'',$$
$$u = -1 + 2t''.$$

La ecuacion $[B]$ será por lo tanto

$$3t + 5z = 29 + 15t'',$$

de donde salen las fórmulas

$$z = 1 + 3t''',$$
$$t = 8 + 5t'' - 5t'''.$$

Luego la ecuacion $[A]$ será

$$2x + y = 8 + 5t'' - 5t''',$$

de donde vienen las fórmulas

$$x = -t^{\text{iv}},$$
$$y = 8 + 5t'' - 5t''' + 2t^{\text{iv}}.$$

Tenemos pues halladas las cuatro fórmulas que dan los valores enteros de las cuatro incógnitas x, y, z, u. Dando ahora á las tres indeterminadas t'', t''' y t^{iv} valores enteros convenientes para que los valores de las cuatro incógnitas sean positivos, tendremos las soluciones enteras y positivas de la ecuacion.

154. Resolucion del segundo problema de la análisis indeterminada de primer grado, á saber: *hallar las soluciones enteras y positivas de dos ó mas ecuaciones de primer grado con mayor número de incógnitas.*

Consideremos en primer lugar el caso de dos ecuaciones con tres incógnitas; y sean las ecuaciones

$$ax + by + cz = d,$$
$$a'x + b'y + c'z = d'.$$

Como tratamos de hallar las soluciones enteras y positivas comunes á estas dos ecuaciones, los coeficientes a, b, c no pueden tener ningun factor comun á los tres (145), como tampoco los coeficientes a', b', c'.

Esto supuesto, eliminemos entre estas dos ecuaciones una de las incógnitas, z por ejemplo, y resultará una ecuacion con las dos incógnitas x é y, que representaremos por

$$Ax + By = C.$$

Si los coeficientes A y B de esta ecuacion (despues de que se haya simplificado enteramente) son primos entre sí, en cuyo caso esta ecuacion tendrá infinidad de soluciones enteras, deduciremos de dicha ecuacion las fórmulas

$$x = \alpha - Bt,\ y = \beta + At:$$

sustituyendo estos valores en una de las ecuaciones propuestas, resultará una ecuacion con las incógnitas z y t, y la representaremos por

$$Mz + Nt = P;$$

y si esta ecuacion tiene soluciones enteras, deduciremos de ella las fórmulas

$$z = \alpha' - Nt',\ t = \beta' + Mt'.$$

Sustituyendo el valor de t en las fórmulas que nos dan los valores de x é y, tendremos

$$x = \alpha - B\beta' - BMt',$$
$$y = \beta + A\alpha' + AMt'.$$

Asi tendremos las tres incógnitas x, y, z en funcion de la indeterminada t'.

Para que los valores de las incógnitas sean positivos, hallaremos los límites entre que debe hallarse t' por medio de las desigualdades

$$\alpha - B\beta' - BMt' > 0,$$
$$\beta + A\alpha' + AMt' > 0,$$
$$\alpha' - Nt' > 0.$$

Nota. Si simplificada enteramente la ecuacion

$$Mz + Nt = P,$$

fuere $M = \pm 1$, será $z = P - Nt$; y en este caso los valores de las tres incógnitas serán

$$x = \beta - Bt,$$
$$y = \alpha + At,$$
$$z = P - Nt,$$

y por lo tanto solo dependerán de la primera indeterminada.

Ejemplos. 1.° $2x + 14y - 7z = 341,$

$$10x + 4y + 9z = 473.$$

Estas ecuaciones tendrán quizá soluciones enteras comunes, puesto que los coeficientes de las tres incógnitas no tienen ningun factor comun.

Eliminando entre ellas la x, resulta la ecuacion

$$3y - 2z = 56,$$

la cual tiene infinidad de soluciones enteras, dadas por las fórmulas

$$y = 2t, \quad z = -28 + 3t.$$

Sustituyendo estos valores en la primera de las dos ecuaciones propuestas, resulta la ecuacion

$$2x + 7t = 15,$$

que tiene infinitas soluciones enteras. Las fórmulas que las dan son:

$$x = 69 + 7t', \quad t = 1 - 2t':$$

por consiguiente

$$z = -25 - 6t', \quad y = 2 - 4t'.$$

Luego las soluciones enteras de las dos ecuaciones propuestas están dadas por las fórmulas

$$x = 69 + 7t', \quad y = 2 - 4t', \quad z = -25 - 6t'.$$

Para que estas soluciones enteras sean además positivas, estableceremos las desigualdades

$$69 + 7t' > 0,$$
$$2 - 4t' > 0,$$
$$-25 - 6t' > 0,$$

de las cuales se deducen

$$t' > -9\tfrac{4}{7},$$
$$t' < \tfrac{1}{2},$$
$$t' < -4\tfrac{1}{6};$$

es decir que t' debe tener los valores $-5, -6, -7, -8, -9$, y por tanto las ecuaciones propuestas tienen cinco soluciones enteras y positivas.

51 2.° Sean las dos ecuaciones de primer grado con tres incógnitas

$$3x + 12y + 25z = 12,$$
$$5x + 21y + 40z = 20.$$

Como los tres coeficientes de las incógnitas x, y, z no tienen ningun factor comun en ninguna de estas ecuaciones, cada una de ellas tiene infinidad de soluciones enteras, y por tanto las dos tendrán quizá soluciones comunes.

Eliminando la z entre ellas, resulta la ecuacion

$$6x + 9y = 4,$$

que no puede tener soluciones enteras, y por tanto las ecuaciones propuestas no tienen ninguna solucion entera comun.

Si en lugar de eliminar la z, hubiéramos eliminado la x, hubiera resultado la ecuacion

$$3y + 10z = 4,$$

que tiene infinidad de soluciones enteras dadas por las fórmulas

$$y = -2 - 10t,$$
$$z = 1 + 3t,$$

Sustituyendo estos valores en la primera de las dos ecuaciones propuestas, resulta la ecuacion

$$3x - 45t = 11,$$

que no tiene solucion alguna en números enteros. Luego las ecuaciones propuestas tampoco tienen ninguna solucion comun.

52 Problema 1°. *Componer* 20 *reales con* 20 *monedas, á saber, con medios duros, pesetas y cuartos.*

Sean x, y, z los números de medios duros, pesetas y cuartos: tomando por unidad de dinero el cuarto, el medio duro tiene 85 cuartos, y la peseta 34; luego tendremos las dos ecuaciones con tres incógnitas:

$$85x + 34y + z = 170,$$
$$x + y + z = 20.$$

Eliminando la z, resulta

$$84y + 33y = 130,$$

de donde salen las fórmulas

$$x = 1 - 33t, \quad y = 2 + 84t;$$

y por consiguiente, sustituyendo estos valores en la segunda de las dos ecuaciones propuestas, tendremos

$$z = 17 - 15t.$$

Como los valores de x, y, z deben ser positivos, tendremos las desigualdades

$$1 - 33t > 0,$$
$$2 + 84t > 0,$$
$$17 - 15t > 0;$$

de las cuales resultan $t < \frac{1}{33}$, $t > -\frac{1}{42}$, $t < \frac{17}{15}$; luego t no puede tener mas valor entero que 0; y por tanto la única solucion del problema es $x = 1$, $y = 2$, $z = 17$, la cual es fácil comprobar.

Problema 2.° *Se han comprado* 100 *reses, á saber, bueyes, vacas y terneros, por* 50000 *reales: cada buey costó* 1000 *reales, cada vaca* 800 *reales, y cada ternero* 320 *reales. Se quiere determinar el número de bueyes, el de vacas y el de terneros.*

Sean x, y, z estos números: tendremos las dos ecuaciones

$$x + y + z = 100,$$
$$1000x + 800y + 320z = 50000,$$

ó simplificando esta última,

$$25x + 20y + 8z = 1250.$$

Eliminando entre las dos la x, resulta

$$17x + 12y = 450,$$

de la cual salen las fórmulas

$$x = -6 - 12t, \quad y = 46 + 17t:$$

sustituyendo estos valores en la ecuacion

$$z = 100 - y - x,$$

resulta

$$z = 60 - 5t.$$

Tenemos ahora $$-6-12t>0,$$
$$46+17t>0,$$
$$60-5t>0;$$
de donde $$t<-\tfrac{1}{2},$$
$$t>-2\tfrac{12}{17},$$
$$t<12;$$
luego los valores que puede tener t son -1 y -2; y por consiguiente el problema tiene las dos únicas soluciones:

$$t=-1\,;\ x=6,\ y=29,\ z=65,$$
$$t=-2\,;\ x=18,\ y=12,\ z=70.$$

155. Consideremos el caso de dos ecuaciones con cuatro incógnitas, y sean

$$ax+by+cz+du=e,$$
$$a'x+b'y+c'z+d'u=e'.$$

Eliminando entre ellas una de las incógnitas, por ejemplo la u, resulta la ecuacion con tres incógnitas

$$Ax+By+Cz=D.$$

Ya hemos visto que de esta ecuacion resultan tres fórmulas, que nos dan en funcion de una ó de dos indeterminadas los valores de x, y, z: sustituyendo estos valores en una de las ecuaciones propuestas, se hallará en el primer caso el valor de u en funcion de dicha indeterminada y de otra segunda; y en el segundo en funcion de las dos indeterminadas y de otra tercera.

156. Por el mismo estilo puede resolverse un número cualquiera de ecuaciones, cuyo número de incógnitas esceda en dos ó mas al de ecuaciones.

Ejemplo. $$5x-8y+4z+2u=50,$$
$$x-4y-2z+60u=38.$$

Eliminando la x, resulta

$$-12y-14z+298u=140,$$

ó simplificando y pasando el término en u al segundo miembro,

$$6y+7z=149u-70,$$

que nos da las fórmulas

$$y=19u-7-7t,$$
$$z=5u-4+6t.$$

Sustituyendo estos valores en la segunda de las dos ecuaciones

propuestas, y despejando inmediatamente la x, pues que su coeficiente es 1, será

$$x = 2 + 26u - 16t.$$

Ahora,

$$19u - 7 \quad - 7t > 0,$$
$$5u - 4 \quad + 6t > 0,$$
$$2 + 26u - 16t > 0;$$

de las cuales resultan

$$t < \frac{19u - 7}{7},$$
$$t > \frac{4 - 5u}{6},$$
$$t < \frac{2 + 26u}{16}.$$

Asi, si $u = 1$, será $t < \frac{12}{7}$, $t > -\frac{1}{6}$, $t < \frac{7}{8}$;

luego $t = 0$, ó $t = 1$:

si $u = 1$ y $t = 0$,

serán $x = 28$, $y = 12$, $z = 1$;

si $u = 1$ y $t = 1$,

serán $x = 12$, $y = 5$, $z = 7$;

etc.